

esenciales

3<sub>ESO</sub>

MATEMÁTICAS  
ORIENTADAS A  
LAS ENSEÑANZAS  
APLICADAS

Aprueba  
tus exámenes

solucionario

Oxford  
EDUCACIÓN



**OXFORD**  
UNIVERSITY PRESS

Oxford University Press es un departamento de la Universidad de Oxford. Como parte integrante de esta institución, promueve el objetivo de excelencia en la investigación y la educación a través de sus publicaciones en todo el mundo. Oxford y Oxford Educación son marcas registradas de Oxford University Press.

Publicado en España por  
Oxford University Press España S. A.  
Parque Empresarial San Fernando, Edificio Atenas  
28830 San Fernando de Henares (Madrid)

© del texto: Alberto Quero Grande, 2016  
© de esta edición: Oxford University Press España S. A., 2016

Todos los derechos reservados. No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su grabación y / o digitalización en ningún sistema de almacenamiento, ni su transmisión en ningún formato o por cualquier medio, sin el permiso previo y por escrito de Oxford University Press España S. A., o según lo expresamente permitido por la ley, mediante licencia o bajo los términos acordados con la organización de derechos reprográficos que corresponda. Las cuestiones y solicitudes referentes a la reproducción de cualquier elemento de este libro, fuera de los límites anteriormente expuestos, deben dirigirse al Departamento de Derechos de Oxford University Press España S. A.

No está permitida la distribución o circulación de esta obra en cualquier otro formato.  
Esta condición debe imponerse y obliga a cualquier adquirente o usuario.

Oxford University Press España S. A. no hace propios los contenidos de las páginas web pertenecientes o gestionadas por terceros a las que se acceda a través de cualquier dirección web citada en esta publicación. Por tanto, se excluye cualquier responsabilidad por los daños y perjuicios de toda clase que pudieran derivarse del acceso a dichas páginas o contenidos.

ISBN: 978-01-905-0891-3  
Depósito legal: M-8155-2016  
Impreso en España

**Solucionario**  
ISBN: 978-01-905-0892-0  
Depósito legal: M-8156-2016

**AUTORÍA**

Alberto Quero Grande

**COORDINACIÓN EDITORIAL**

Angélica Escoredo García

# Cómo se trabaja una unidad

**Aprueba tus exámenes** es un material cuyo objetivo es que el alumno repase contenidos y procedimientos de las diferentes unidades que se trabajan en el curso presentadas a modo de propuestas de evaluación para que consiga superar el curso con éxito.

Este material adopta un formato de «entrenamiento» para enfrentarse a la resolución de exámenes: cada unidad consta de cuatro pruebas; las dos primeras se presentan con ayudas didácticas para el alumno (recordatorios, alertas, explicación de procedimientos, etc., siempre asociadas a preguntas concretas), mientras las dos últimas se plantean ya sin ayudas, para que el alumno las resuelva por sí solo. Así, mediante la práctica guiada de rutinas, el alumno va adquiriendo confianza y la preparación adecuada para aprobar sus exámenes.

## POLINOMIOS

### Evaluación A

- Expresa estas frases con lenguaje algebraico.
  - El cuadrado de la suma de dos números.
  - El producto de dos números consecutivos.
  - La mitad del cubo de un número.
  - Un quinto de la diferencia de dos números.
- Realiza las siguientes operaciones con monomios.
  - $3x^2y \cdot (-2xy^2x)$
  - $16x^3y^2 \cdot (-4xy^2)$
  - $\frac{1}{5}9xy^2 \cdot \left(\frac{5}{3}x^2y^2x\right)$
  - $-3ab^2c \cdot 2a^2b$
- ¿Cuál es el valor numérico de estas expresiones para los valores que se indican? Calcula.
  - $2x + 4y = -ab$  para  $a = -3, b = 2$
  - $2 - x^2 + 3x$  para  $x = -1, x = -2$
  - $\frac{-3xy^2}{x}$  para  $x = -4, y = -2, z = 5$
  - $5y - x^2$  para  $x = -1, y = 7, z = 3$
- De los siguientes valores, entala los que son raíz de este polinomio:  $x^2 - 7x + 16 = 12$ 
  - $x = 0$
  - $x = 2$
  - $x = 3$
  - $x = -1$
- Considera los polinomios:
 

$A(x) = 2x^2 - 3x + 5$	$B(x) = -x^2 + x - 4$	$C(x) = 3x^2 - 3$
Calcula:		
a) $A(x) + B(x) + C(x)$	b) $2A(x) - B(x) - C(x)$	c) $4C(x) - B(x)$

## Evaluación C

1. Relaciona cada ecuación lineal con su solución correspondiente.

$x - y = 2$	$x = -3, y = -2$
$-3x + y = 7$	$x = 3, y = 3$
$2x + 4y = 8$	$x = -4, y = -6$
$4x - y = 9$	$x = 0, y = -2$

Completa las tablas de modo que cada par de números  $(x, y)$  sea una solución de la ecuación lineal  $x - y = 10$ . ¿Cuál es la solución del sistema formado por ambas?

<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><th>x</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr> <tr><th>y</th><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	x	1	2	3	4	y					<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><th>x</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr> <tr><th>y</th><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	x	1	2	3	4	y				
x	1	2	3	4																	
y																					
x	1	2	3	4																	
y																					

Resuelve este sistema mediante el método de sustitución:  $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x + 2y = -2 \end{cases}$

Resuelve el siguiente sistema mediante el método de igualación:  $\begin{cases} -7x + 3y = -9 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases}$

Resuelve el siguiente sistema mediante el método de reducción:  $\begin{cases} 6x - y = 3 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$

## GEOMETRÍA DEL ESPACIO

### Evaluación A

- Indica las caras, vértices y aristas de esta figura. ¿Qué posición tienen entre sí las rectas que forman las aristas  $AB$  y  $EF$ ? ¿Y las caras  $ABCD$  y  $EFGH$ ?
 

**Ten en cuenta**

Las caras y las aristas las nombramos mediante los vértices que las forman.
- Halla el área total y el volumen de este prisma.
 

**Recuerda**

Área y volumen de prisma:

 $A_t = P \cdot h$   
 $V = A_b \cdot h$   
 $P = A_1 + A_2$   
 $V = A_b \cdot h$
- Calcula la diagonal de un cubo si el área total es  $150 \text{ m}^2$ .
- Halla el área total y el volumen de una pirámide regular pentagonal cuyo lado de la base mide  $12 \text{ cm}$ , la apotema de la base  $8,26 \text{ cm}$  y la apotema de la pirámide  $16 \text{ cm}$ .
 

**Recuerda**

Área y volumen de pirámide:

 $A_t = P + A_b$   
 $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$
- Determina la altura de una pirámide de base cuadrada de lado  $4 \text{ cm}$  si sabemos que su volumen es  $86 \text{ cm}^3$ .
 

**Ten en cuenta**

Sustituye los datos en la fórmula del volumen y resuelve la ecuación.

## PRUEBA FINAL DE CURSO

### Evaluación A

- Calcula y simplifica el resultado:  $\left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3}$
- Expresa en forma de una única potencia.
  - $5^2 \cdot (5)^3 \cdot (20^2 \cdot 4^2)$
  - $\frac{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2}{2^2 \cdot 2^2}$
  - $\{11^{-1}\}^2$
- Desarrolla las siguientes identidades notables.
  - $(-2x - 4y)^2$
  - $(-2y^2 + 3)^2$
  - $(-3z + 2y)^2(-3z - 2y)$
- Resuelve la siguiente ecuación:  $2x^2 - 2x - 24 = 0$
- Simplifica y resuelve el siguiente sistema:  $\begin{cases} -x + 2 & y - 1 & 1 \\ \frac{2x + 1}{4} & \frac{3y}{8} & \frac{11}{20} \end{cases}$

### Prueba final de curso

- Halla el primer término, el término general y el término veintavo de una progresión aritmética cuya diferencia es  $d = 5$  y su décimo término vale  $29$ .
- Halla el área y el volumen de un cono de  $12 \text{ cm}$  de diámetro y  $18 \text{ cm}$  de generatriz.
- Describe las características de esta gráfica.
- Representa la función cuadrática  $f(x) = x^2 - 2x - 8$ .
- Dada la siguiente tabla, halla la media, la mediana, la varianza y la desviación típica.
 

$x_i$	$f_i$	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
3	2	6	18
4	5	20	80
5	10	50	250
6	12	72	432
7	8	56	392
8	3	24	192
Suma	60	228	1364

Como ayuda se incluyen dos elementos: **Ten en cuenta** y **Recuerda**, que facilitan la resolución de algunas actividades.

Al final del cuaderno se presentan dos pruebas finales de curso para trabajar todos los contenidos de forma global.

# Índice

Números racionales .....	4
Potencias .....	12
Polinomios .....	20
Ecuaciones .....	28
Sistemas de ecuaciones .....	36
Sucesiones .....	44
Geometría del plano. Movimientos .....	52
Triángulos. Propiedades .....	60
Geometría del espacio .....	68
Funciones .....	76
Funciones lineales y cuadráticas .....	84
Estadística .....	92
Prueba final de curso .....	100

 **esenciales**

**3** ESO

**MATEMÁTICAS**  
orientadas a las enseñanzas  
aplicadas

**Aprueba tus  
exámenes**

---

**solucionario**

**Oxford**  
EDUCACIÓN

# NÚMEROS RACIONALES

## Evaluación A

1. Ordena de menor a mayor estas fracciones:  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{9}{20}$ ,  $\frac{18}{25}$ ,  $\frac{3}{5}$

Reducimos a común denominador.

$$\frac{1}{2} = \frac{50}{100} \quad \frac{9}{20} = \frac{45}{100} \quad \frac{18}{25} = \frac{72}{100} \quad \frac{3}{5} = \frac{60}{100}$$

Como  $\frac{45}{100} < \frac{50}{100} < \frac{60}{100} < \frac{72}{100}$ , entonces:  $\frac{9}{20} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{18}{25}$

### Ten en cuenta

Para ordenar fracciones, expresamos la solución mediante las fracciones iniciales, no las equivalentes que hemos calculado.

2. Resuelve la expresión  $\frac{1}{2} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{7}{4} + \frac{2}{3}\right)$  y simplifica el resultado.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{7}{4} + \frac{2}{3}\right) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{21}{12} + \frac{8}{12}\right) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3}{5} \cdot \frac{29}{12} = \frac{1}{2} - \frac{87}{60} = \frac{30}{60} - \frac{87}{60} = -\frac{57}{60} = -\frac{19}{20} \end{aligned}$$

### Recuerda

Para realizar operaciones combinadas con fracciones:

- 1.º Se resuelven los paréntesis.
- 2.º Se calculan las multiplicaciones y las divisiones.
- 3.º Se resuelven las sumas y las restas.

3. Calcula y simplifica el resultado a la fracción irreducible:  $\left(-\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) : \frac{3}{4} - \frac{1}{6} \cdot 4$

$$\left(-\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) : \frac{3}{4} - \frac{1}{6} \cdot 4 = \left(-\frac{6}{15} + \frac{5}{15}\right) : \frac{3}{4} - \frac{4}{6} = -\frac{1}{15} : \frac{3}{4} - \frac{4}{6} = -\frac{4}{45} - \frac{4}{6} = -\frac{8}{90} - \frac{60}{90} = -\frac{68}{90} = -\frac{34}{45}$$

4. Convierte estas fracciones en números decimales y clasifícalos según sean decimal exacto, periódico puro o periódico mixto.

a)  $\frac{3}{11}$                       b)  $\frac{11}{25}$                       c)  $\frac{17}{18}$

a)  $\frac{3}{11} = 0,272727... = 0,2\overline{7} \rightarrow$  Periódico puro

b)  $\frac{11}{25} = 0,44 \rightarrow$  Exacto

c)  $\frac{17}{18} = 0,944444... = 0,9\overline{4} \rightarrow$  Periódico mixto

### Recuerda

**Decimal exacto:** número limitado de cifras decimales.

**Decimal periódico puro:** el período comienza después de la coma.

**Decimal periódico mixto:** tiene anteperíodo.

5. Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales y expresa el resultado en forma de fracción irreducible.

a) 7,6    b)  $0,1\overline{8}$     c)  $3,1\overline{76}$

a)  $a = 7,6 \rightarrow 10a = 76 \rightarrow a = \frac{76}{10} = \frac{38}{5}$

b)  $b = 0,1\overline{8} \rightarrow 100b = 18,1\overline{8} \rightarrow 100b - b = 18,1\overline{8} - 0,1\overline{8} \rightarrow 99b = 18 \rightarrow b = \frac{18}{99}$

c)  $c = 3,1\overline{76} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 1000c = 3176,7\overline{6} \\ 10c = 31,7\overline{6} \end{array} \right\} \rightarrow 1000c - 10c = 3176,7\overline{6} - 31,7\overline{6} \rightarrow 990c = 3145 \rightarrow c = \frac{3145}{990} = \frac{629}{198}$

6. El número 0,4 es una aproximación de  $\frac{5}{12}$ . Calcula el error absoluto y relativo que se comete.

$$\text{Error absoluto} = \left| \frac{5}{12} - 0,4 \right| = \left| \frac{5}{12} - \frac{4}{10} \right| = \left| \frac{25}{60} - \frac{24}{60} \right| = \left| \frac{1}{60} \right| = \frac{1}{60}$$

$$\text{Error relativo} = \frac{\left| \frac{1}{60} \right|}{\left| \frac{5}{12} \right|} = \left| \frac{12}{300} \right| = \frac{1}{25} = 0,04 \rightarrow 4\%$$

### Recuerda

Si  $a$  es la aproximación del número  $x$ :

$$\text{Error absoluto} = |x - a|$$

$$\text{Error relativo} = \frac{|x - a|}{|x|}$$

7. Ayer, Paula llenó un tercio de una piscina. Hoy ha añadido dos quintos de lo que quedaba sin llenar. Si aún faltan 400 L para llenar por completo la piscina, ¿cuál es su capacidad?

Quedaba por llenar  $\frac{2}{3}$  de la piscina. Añade  $\frac{2}{5}$  de  $\frac{2}{3} = \frac{4}{15}$ .

Se han llenado  $\frac{1}{3} + \frac{4}{15} = \frac{5}{15} + \frac{4}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$  de la capacidad de la piscina.

$\frac{2}{5}$  de la capacidad sin llenar son 400 L, por lo que  $\frac{1}{5}$  son 200 L.

La capacidad total de la piscina es:  $5 \cdot 200 = 1\,000$  L

8. Un ciclista tiene que recorrer 720 km en tres días. El primer día realiza  $\frac{3}{8}$  partes del total y, el segundo,  $\frac{4}{9}$ . ¿Qué fracción del total le falta por recorrer? ¿Cuántos kilómetros son?

$$\text{Distancia recorrida entre el primer y segundo día: } \frac{3}{8} + \frac{4}{9} = \frac{27}{72} + \frac{32}{72} = \frac{59}{72}$$

$$\text{Fracción del total que falta por recorrer: } \frac{72}{72} - \frac{59}{72} = \frac{13}{72}$$

$$\text{Por tanto: } \frac{13}{72} \text{ de } 720 = \frac{13 \cdot 720}{72} = 130$$

Le faltan por recorrer 130 km.

9. Daniel ocupa  $\frac{1}{6}$  de su tiempo libre jugando en el ordenador y  $\frac{1}{4}$  del resto jugando a la videoconsola. ¿Qué fracción de su tiempo libre pasa jugando?

Al ordenador juega  $\frac{1}{6}$  y a la videoconsola  $\frac{1}{4}$  de  $\frac{5}{6} = \frac{5}{24}$ .

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{24} = \frac{4}{24} + \frac{5}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

Por tanto, en total Daniel pasa  $\frac{3}{8}$  de su tiempo libre jugando en el ordenador y la consola.

10. Explica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- Para pasar una fracción a un número decimal dividimos el denominador entre el numerador.
  - Siempre podemos escribir un número periódico puro en forma de fracción.
  - Al realizar operaciones combinadas con fracciones las resolvemos siempre de izquierda a derecha, independientemente de la operación que sea.
- FALSO. Se divide el numerador entre el denominador.
  - VERDADERO. Todos los números periódicos puros tienen fracción generatriz.
  - FALSO. Hay que respetar la jerarquía de operaciones.

## Evaluación B

1. En una fiesta de cumpleaños, Alberto come  $\frac{2}{7}$  de la tarta, Borja  $\frac{1}{4}$  y Carlos el resto. ¿Quién de los tres ha comido más porción de tarta?

Entre Alberto y Borja han comido  $\frac{2}{7} + \frac{1}{4} = \frac{8}{28} + \frac{7}{28} = \frac{15}{28}$ . Luego, Carlos ha comido  $\frac{13}{28}$ .

Como  $\frac{13}{28} > \frac{8}{28} > \frac{7}{28}$ , Carlos es el que más porción de tarta ha comido.

2. Resuelve esta expresión y simplifica el resultado:  $\left(\frac{3}{5} - \frac{2}{15}\right) \cdot \frac{2}{7} - \frac{3}{10} : 2$

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{15}\right) \cdot \frac{2}{7} - \frac{3}{10} : 2 &= \left(\frac{9}{15} - \frac{2}{15}\right) \cdot \frac{2}{7} - \frac{3}{10} : 2 = \frac{7}{15} \cdot \frac{2}{7} - \frac{3}{10} : 2 = \\ &= \frac{14}{105} - \frac{3}{20} = \frac{2}{15} - \frac{3}{20} = \frac{8}{60} - \frac{9}{60} = -\frac{1}{60} \end{aligned}$$

### Ten en cuenta

Si en los pasos intermedios simplificamos cada fracción, facilitamos mucho los cálculos.

3. Calcula y simplifica el resultado a la fracción irreducible:  $\left(\frac{1}{7} - \frac{4}{3}\right) \cdot 3 - \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5}$

$$\left(\frac{1}{7} - \frac{4}{3}\right) \cdot 3 - \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{3}{21} - \frac{28}{21}\right) \cdot 3 - \frac{2}{30} = -\frac{25}{21} \cdot 3 - \frac{2}{30} = -\frac{75}{21} - \frac{2}{30} = -\frac{750}{210} - \frac{14}{210} = -\frac{764}{210} = -\frac{382}{105}$$

4. Los gastos mensuales de la familia Navarro se distribuyen de la siguiente forma:

- Un tercio del gasto se destina a la hipoteca.
- Un sexto, a pagar la comunidad.
- Un cuarto, a la comida.
- Los 300 € restantes, a otros gastos.

¿Cuál es el gasto mensual de la familia Navarro?

Entre la hipoteca, la comida y la comunidad gastan  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ , por lo que la fracción que corresponde a otros gastos es  $\frac{1}{4}$ .

Es decir,  $\frac{1}{4}$  del gasto total equivale a 300 €, por lo que el gasto mensual total de la familia Navarro será:  $300 \cdot 4 = 1\,200$  €

5. Resuelve la expresión  $1,2 - 1,\widehat{6} + 2,4\widehat{6}$  transformando previamente los decimales en fracciones.

### Ten en cuenta

**Decimal exacto:**  $\frac{\text{número sin coma}}{\text{un 1 y tantos 0 como cifras decimales}}$

**Periódico puro:**  $\frac{\text{número sin coma} - \text{número hasta el período}}{\text{tantos 9 como cifras periódicas}}$

**Periódico mixto:**  $\frac{\text{número sin coma} - \text{número hasta el período}}{\text{tantos 9 como cifras periódicas y tantos 0 anteperiódicas}}$

$$1,2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \qquad 1,\widehat{6} = \frac{16 - 1}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \qquad 2,4\widehat{6} = \frac{246 - 24}{90} = \frac{222}{90} = \frac{37}{15}$$

$$1,2 - 1,\widehat{6} + 2,4\widehat{6} = \frac{6}{5} - \frac{5}{3} + \frac{37}{15} = \frac{18}{15} - \frac{25}{15} + \frac{37}{15} = \frac{30}{15} = 2$$



6. ¿Para qué valores de  $x$  se cumple  $|x| < 4$ ? Escribe la solución en forma de intervalo.

El valor absoluto se define como la distancia de un número al número 0. Por tanto, el problema nos pregunta por aquellos valores de  $x$  cuya distancia al número 0 es menor que 4.

Esto se cumple para todos los valores de  $x$  que sean, a la vez, mayores que  $-4$  y menores que  $+4$ , es decir, la solución sería el intervalo  $(-4, +4)$ .

7. Aproxima el número 3,48 a las décimas mediante truncamiento y redondeo, y calcula el error relativo que se produce en cada caso.

Aproximación por truncamiento: 3,4

$$\text{Error relativo} = \frac{|3,48 - 3,4|}{|3,48|} = \frac{|0,08|}{|3,48|} = 0,023 \rightarrow 2,3 \%$$

Aproximación por redondeo: 3,5

$$\text{Error relativo} = \frac{|3,48 - 3,5|}{|3,48|} = \frac{|-0,02|}{|3,48|} = 0,0057 \rightarrow 0,57 \%$$

### Ten en cuenta

El error que se comete al aproximar por redondeo siempre es menor que el que se comete al aproximar por truncamiento.

8. En un almacén hay 20 sacos de arroz de 45 kg cada uno y se gastan  $\frac{2}{5}$  del total. ¿Cuántos kilos de arroz quedan?

Primero, calculamos la cantidad total de arroz que hay en el almacén:  $45 \cdot 20 = 900$  kg

Se gastan  $\frac{2}{5}$  de 900 =  $\frac{2 \cdot 900}{5} = 360$  kg. Por tanto, quedan  $900 - 360 = 540$  kg de arroz.

9. Representa las fracciones  $\frac{1}{3}$ ,  $-\frac{2}{7}$  y  $\frac{9}{2}$  en la misma recta real.



10. Halla tres números periódicos puros que se encuentren entre  $\frac{1}{6}$  y  $\frac{1}{7}$ .

Transformamos las fracciones en números decimales dividiendo el numerador entre el denominador.

$$\frac{1}{6} = 0,166666... \qquad \frac{1}{7} = 0,142857...$$

Por tanto, tenemos que hallar 3 números periódicos puros que se encuentren entre 0,16666... y 0,142857...

Cualquiera que comience por 0,15 cumpliría la condición. Por ejemplo: 0,151515..., 0,152152152... y 0,157157157...

## Evaluación C

1. Ordena de mayor a menor las siguientes fracciones:  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{7}{4}$  y  $\frac{1}{2}$

Para poder comparar las fracciones tenemos que reducirlas a común denominador, dando como resultado  $\frac{36}{60}$ ,  $\frac{50}{60}$ ,  $\frac{105}{60}$  y  $\frac{30}{60}$ , respectivamente. Así pues, el orden sería  $\frac{7}{4} > \frac{5}{6} > \frac{3}{5} > \frac{1}{2}$ .

2. Calcula simplificando el resultado:  $\frac{2}{7} : \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\right) : \left(\frac{7}{6} - 2 + \frac{1}{4}\right)$

$$\begin{aligned} \frac{2}{7} : \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\right) : \left(\frac{7}{6} - 2 + \frac{1}{4}\right) &= \frac{2}{7} : \frac{3}{4} - \left(\frac{2}{6} - \frac{5}{6}\right) : \left(\frac{14}{12} - \frac{24}{12} + \frac{3}{12}\right) = \frac{2}{7} : \frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{6}\right) : \left(-\frac{7}{12}\right) = \\ &= \frac{8}{21} - \frac{36}{42} = \frac{16}{42} - \frac{36}{42} = -\frac{20}{42} = -\frac{10}{21} \end{aligned}$$

3. Resuelve y simplifica el resultado:  $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{7}{6}$

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{7}{6} = \frac{3}{4} - \frac{8}{15} + \frac{7}{6} = \frac{45}{60} - \frac{32}{60} + \frac{70}{60} = \frac{83}{60}$$

4. Convierte las siguientes fracciones en números decimales y clasifícalos según sean decimal exacto, periódico puro o periódico mixto.

a)  $\frac{3}{16}$

b)  $\frac{98}{225}$

c)  $\frac{2}{13}$

Para convertir las fracciones en números decimales dividimos el numerador entre el denominador.

a)  $\frac{3}{16} = 0,1875 \rightarrow$  Decimal exacto

b)  $\frac{98}{225} = 0,435555... = 0,43\widehat{5} \rightarrow$  Periódico mixto

c)  $\frac{2}{13} = 0,153846153846... = 0,1\widehat{53846} \rightarrow$  Periódico puro

5. Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales.

a) 1,275

b)  $-23,4\widehat{}$

c)  $2,1\widehat{6}$

a)  $a = 1,275 \rightarrow 1000a = 1275 \rightarrow a = \frac{1275}{1000} = \frac{51}{40}$

b) Llamamos  $b'$  a  $b$  con signo positivo.

$$b' = 23,4\widehat{ } \rightarrow 10b' = 234,4\widehat{ } \rightarrow 10b' - b' = 234,4\widehat{ } - 23,4\widehat{ } \rightarrow 9b' = 211 \rightarrow b' = \frac{211}{9} \rightarrow b = -\frac{211}{9}$$

c)  $c = 2,1\widehat{6} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 100c = 216,6\widehat{ } \\ 10c = 21,6\widehat{ } \end{array} \right\} \rightarrow 100c - 10c = 216,6\widehat{ } - 21,6\widehat{ } \rightarrow 90c = 195 \rightarrow c = \frac{195}{90} = \frac{13}{6}$

6. María gastó  $\frac{2}{9}$  del dinero que llevaba y le han sobrado 217 €. ¿Cuánto dinero tenía al principio?

Como gastó  $\frac{2}{9}$ , le han sobrado  $\frac{7}{9}$  que equivalen a 217 €.

Por tanto, al principio tenía:  $\frac{217 \cdot 9}{7} = 279$  €

7. De un rollo de tela se ha cortado la mitad para hacer un vestido, la mitad de lo que queda para una falda, tres quintos del resto para un pañuelo y aún nos ha sobrado un metro. ¿Cuánto medía el rollo de tela inicial?

Para el vestido se utiliza  $\frac{1}{2}$  del rollo de tela, y para la falda,  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ .

Entre la falda y el vestido se utilizan  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$  del rollo por lo que sobra  $\frac{1}{4}$ .

Para el pañuelo se usa  $\frac{3}{5}$  de  $\frac{1}{4} = \frac{3}{20}$ .

Entre el vestido, la falda y el pañuelo se han utilizado  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{20} = \frac{10}{20} + \frac{5}{20} + \frac{3}{20} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$  del rollo.

Luego ha sobrado  $\frac{1}{10}$  que equivale a un metro. Por lo que el rollo inicial tenía 10 m de longitud.

8. Un estudiante dedica  $\frac{3}{5}$  de su tiempo libre a estudiar. La cuarta parte de lo que le queda, a hacer deporte, y el resto, a descansar. ¿Qué fracción de su tiempo libre dedica a descansar?

Si dedica  $\frac{3}{5}$  de su tiempo libre a estudiar, le quedan  $\frac{2}{5}$  para el resto de actividades.

A hacer deporte dedica  $\frac{1}{4}$  de  $\frac{2}{5} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$  de su tiempo libre.

Entre estudiar y hacer deporte, utiliza  $\frac{3}{5} + \frac{1}{10} = \frac{6}{10} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$  de su tiempo libre.

Por tanto, descansa  $\frac{3}{10}$  de su tiempo libre.

9. Calcula el error absoluto y relativo que se comete al aproximar  $\frac{1}{6}$  por 0,2.

$$\text{Error absoluto} = \left| \frac{1}{6} - 0,2 \right| = \left| \frac{1}{6} - \frac{2}{10} \right| = \left| \frac{5}{30} - \frac{6}{30} \right| = \left| -\frac{1}{30} \right| = \frac{1}{30}$$

$$\text{Error relativo} = \frac{\left| \frac{1}{30} \right|}{\left| \frac{1}{6} \right|} = \left| \frac{6}{30} \right| = \frac{1}{5} = 0,2 \rightarrow 20\%$$

10. Explica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- Al realizar operaciones con fracciones resolvemos las sumas antes que las restas.
  - La expresión fraccionaria de un número decimal se llama fracción generatriz.
  - No se pueden comparar fracciones si tienen el mismo numerador.
- FALSO: Las sumas y las restas se resuelven de izquierda a derecha, pudiendo realizar una resta antes que una suma.
  - VERDADERO. La fracción generatriz es la fracción que genera un número decimal.
  - FALSO. Si dos fracciones tienen el mismo numerador es mayor la que tiene menor denominador.

## Evaluación D

1. Los  $\frac{2}{3}$  de los 216 alumnos de un instituto alguna vez han suspendido alguna asignatura. De ellos, la cuarta parte ha suspendido alguna vez matemáticas. ¿Cuántos alumnos del instituto nunca han suspendido matemáticas?

$$\frac{2}{3} \text{ de } 216 = \frac{2 \cdot 216}{3} = 144 \rightarrow \text{Hay 144 alumnos que han suspendido alguna asignatura.}$$

$$\frac{1}{4} \text{ de } 144 = \frac{144}{4} = 36 \rightarrow \text{Hay 36 alumnos que han suspendido alguna vez matemáticas.}$$

$$216 - 36 = 180$$

Por tanto, hay 180 alumnos que nunca han suspendido matemáticas.

2. Calcula y simplifica el resultado a la fracción irreducible:  $\left(\frac{2}{5} - \frac{5}{2}\right) : \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{4}\right) - \frac{5}{2}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{5} - \frac{5}{2}\right) : \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{4}\right) - \frac{5}{2} &= \left(\frac{4}{10} - \frac{25}{10}\right) : \left(\frac{16}{12} - \frac{9}{12}\right) - \frac{5}{2} = -\frac{21}{10} : \frac{7}{12} - \frac{5}{2} = -\frac{252}{70} - \frac{5}{2} = \\ &= -\frac{252}{70} - \frac{175}{70} = -\frac{427}{70} = -\frac{61}{10} \end{aligned}$$

3. Realiza la siguiente operación simplificando el resultado:  $\left(2 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{7}\right) - 6 : \left(\frac{4}{3} + 2\right)$

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{7}\right) - 6 : \left(\frac{4}{3} + 2\right) &= \left(\frac{8}{4} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{7}{7} + \frac{2}{7}\right) - 6 : \left(\frac{4}{3} + \frac{6}{3}\right) = \frac{7}{4} \cdot \frac{9}{7} - 6 : \frac{10}{3} = \\ &= \frac{63}{28} - \frac{18}{10} = \frac{9}{4} - \frac{9}{5} = \frac{45}{20} - \frac{36}{20} = \frac{9}{20} \end{aligned}$$

4. En el cumpleaños de Sara se comieron  $\frac{1}{3}$  de los pasteles que había. Al día siguiente, su familia se comió  $\frac{2}{3}$  de los que quedaron. Si sobraron 6 pasteles, ¿cuántos había en total?

En el cumpleaños se comieron  $\frac{1}{3}$  de los pasteles, por lo que sobraron  $\frac{2}{3}$  del total.

Al día siguiente, se comieron  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ . En total, se han comido  $\frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{3}{9} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}$  del total, por lo que han sobrado  $\frac{2}{9}$  que equivalen a 6 pasteles. Por tanto, había  $\frac{9 \cdot 6}{2} = 27$  pasteles en total.

5. Encuentra los dos números enteros que se encuentran entre  $\frac{19}{7}$  y  $\frac{29}{6}$ .

Pasamos a número decimal ambas fracciones.

$$\frac{19}{7} = 2,71 \quad \frac{29}{6} = 4,8\widehat{3}$$

Los dos números enteros son 3 y 4.

6. Resuelve esta expresión transformando los decimales en fracciones:  $\frac{3}{5} + 1,4 - 1,3\widehat{6}$

$$1,4 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5} \quad 1,3\widehat{6} = \frac{136 - 13}{90} = \frac{123}{90} = \frac{41}{30}$$

$$\frac{3}{5} = 1,4 - 1,3\widehat{6} = \frac{3}{5} + \frac{7}{5} - \frac{41}{30} = \frac{18}{30} + \frac{42}{30} - \frac{41}{30} = \frac{19}{30}$$

7. Redondea  $\frac{7}{15}$  a las décimas y a las centésimas. ¿En qué caso se produce un mayor error relativo?

En primer lugar calculamos su expresión decimal:  $\frac{7}{15} = 0,466666\dots$

Redondeo a las décimas:  $\frac{7}{15} \approx 0,5$

$$\text{Error relativo} = \frac{\left| \frac{7}{15} - 0,5 \right|}{\left| \frac{7}{15} \right|} = \frac{\left| \frac{7}{15} - \frac{1}{2} \right|}{\left| \frac{7}{15} \right|} = \frac{\left| \frac{14}{30} - \frac{15}{30} \right|}{\left| \frac{7}{15} \right|} = \frac{\left| -\frac{1}{30} \right|}{\left| \frac{7}{15} \right|} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{7}{15}} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14} = 0,071 \rightarrow 7,1\%$$

Redondeo a las centésimas:  $\frac{7}{15} \approx 0,47$

$$\text{Error relativo} = \frac{\left| \frac{7}{15} - 0,47 \right|}{\left| \frac{7}{15} \right|} = \frac{\left| \frac{7}{15} - \frac{47}{100} \right|}{\left| \frac{7}{15} \right|} = \frac{\left| \frac{140}{300} - \frac{141}{300} \right|}{\left| \frac{7}{15} \right|} = \frac{\left| -\frac{1}{300} \right|}{\left| \frac{7}{15} \right|} = \frac{\frac{1}{300}}{\frac{7}{15}} = \frac{15}{2100} = \frac{1}{140} = 0,0071 \rightarrow 0,71\%$$

Se produce un mayor error relativo redondeando a las décimas, como era de esperar.

8. En un cine han vendido  $\frac{1}{3}$  del total de las entradas. Al día siguiente, se vendieron  $\frac{5}{12}$ . ¿Qué día se llenó más el cine?

Tenemos que comparar las fracciones  $\frac{1}{3}$  y  $\frac{5}{12}$ . Para ello reducimos a común denominador, resultando  $\frac{4}{12}$  y  $\frac{5}{12}$  respectivamente. Por tanto, el segundo día se llenó más el cine.

9. Javier ha gastado la tercera parte del dinero que tenía y aún le quedan 48 €. ¿Cuánto dinero ha gastado? ¿Cuánto tenía al principio?

Si ha gastado la tercera parte le quedan dos terceras partes que equivalen a 48 €.

Por tanto, una tercera parte son  $48 \text{ €} : 2 = 24 \text{ €}$  que es el dinero que ha gastado.

Las tres terceras partes que forman el total son  $24 \text{ €} \cdot 3 = 72 \text{ €}$ , que es el dinero que tenía al principio.

10. Un grifo llena una piscina en 4 horas, y otro, en 6 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse la piscina si se abren los dos grifos a la vez?

El primer grifo llenará  $\frac{1}{4}$  de piscina en una hora. El segundo grifo llenará  $\frac{1}{6}$  de piscina. Por tanto, si se abren

los dos a la vez, en una hora se llenará  $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$  de la piscina.

Así pues, tardarán  $\frac{12}{5}$  horas = 2,4 horas.

# POTENCIAS

## Evaluación A

1. Calcula el valor de las siguientes potencias.

a)  $2^{-3}$

b)  $3^{-4}$

c)  $6^{-1}$

d)  $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$

a)  $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

c)  $6^{-1} = \frac{1}{6}$

b)  $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

d)  $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$

### Recuerda

Si un número  $a$  es distinto de cero:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

2. Expresa estos números como potencias de base 2.

a) 256

b)  $\frac{1}{128}$

c)  $\frac{5}{160}$

d) 0,0625

a)  $256 = 2^8$

b)  $\frac{1}{128} = \frac{1}{2^7} = 2^{-7}$

c)  $\frac{5}{160} = \frac{1}{32} = \frac{1}{2^5} = 2^{-5}$

d)  $0,0625 = \frac{625}{10000} = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 2^{-4}$

3. Halla el valor de  $x$  en cada caso.

a)  $-243 = (-3)^x$

b)  $625 = (-5)^x$

c)  $\frac{1}{729} = 3^x$

a)  $-243 = (-3)^5 \rightarrow x = 5$

b)  $625 = (-5)^4 \rightarrow x = 4$

c)  $\frac{1}{729} = \frac{1}{3^6} = 3^{-6} \rightarrow x = -6$

4. Álvaro tiene en cada una de sus 6 estanterías 6 cajas donde guarda 6 estuches con 6 tacos de 6 cromos cada uno. ¿Cuántos cromos tiene Álvaro en total? Expresa el resultado en forma de potencia y calcula el resultado.

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5$$

$$6^5 = 7776$$

Álvaro tiene 7776 cromos.

5. Expresa el resultado de estas operaciones como una única potencia.

a)  $2^{-8} \cdot 2^{-4} : 2^3$

b)  $(-3)^{-2} : (-3)^{-5} \cdot (-3)^7$

c)  $(5^{-4})^2 : \frac{1}{5^6}$

d)  $\frac{1}{((7^{-2})^{-4})^3}$

a)  $2^{-8} \cdot 2^{-4} : 2^3 = 2^{-8+(-4)-3} = 2^{-15}$

b)  $(-3)^{-2} : (-3)^{-5} \cdot (-3)^7 = (-3)^{-2-(-5)+7} = (-3)^{10} = 3^{10}$

c)  $(5^{-4})^2 : \frac{1}{5^6} = \frac{5^{-8}}{5^6} = 5^{-8-6} = 5^{-14}$

d)  $\frac{1}{((7^{-2})^{-4})^3} = \frac{1}{7^{24}} = 7^{-24}$

### Recuerda

Propiedades de las potencias:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

6. Simplifica estas expresiones utilizando las propiedades de las potencias.

a)  $\frac{9^2 \cdot 6^4 \cdot 25^3}{5^3 \cdot 12^2 \cdot 10}$

b)  $\frac{14^{-2} \cdot 7^4 \cdot 8^{-4}}{10^3 \cdot 35^{-2} \cdot 49}$

a)  $\frac{9^2 \cdot 6^4 \cdot 25^3}{5^3 \cdot 12^2 \cdot 10} = \frac{(3^2)^2 \cdot (2 \cdot 3)^4 \cdot (5^2)^3}{5^3 \cdot (2^2 \cdot 3)^2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{3^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^6}{5^3 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^6}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^4} = \frac{3^6 \cdot 5^2}{2}$

b)  $\frac{14^{-2} \cdot 7^4 \cdot 8^{-4}}{10^3 \cdot 35^{-2} \cdot 49} = \frac{35^2 \cdot 7^4}{14^2 \cdot 10^3 \cdot 49 \cdot 8^4} = \frac{(5 \cdot 7)^2 \cdot 7^4}{(2 \cdot 7)^2 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot 7^2 \cdot (2^3)^4} = \frac{5^2 \cdot 7^2 \cdot 7^4}{2^2 \cdot 7^2 \cdot 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 2^{12}} = \frac{5^2 \cdot 7^6}{2^{17} \cdot 7^4 \cdot 5^3} = \frac{7^2}{2^{17} \cdot 5}$

7. Escribe estos números en notación científica.

a) 4497000000

b) 0,0000000853

c) 16000000

d) -0,0000137

a)  $4497000000 = 4,497 \cdot 10^9$

c)  $16000000 = 1,6 \cdot 10^7$

b)  $0,0000000853 = 8,53 \cdot 10^{-8}$

d)  $-0,0000137 = -1,37 \cdot 10^{-5}$

**Ten en cuenta**

La parte entera de un número expresado en notación científica debe estar entre 1 y 9.

8. Calcula y expresa el resultado en notación científica.

a)  $3,18 \cdot 10^5 + 2,63 \cdot 10^3$

b)  $1,3 \cdot 10^{-2} - 3,75 \cdot 10^{-4}$

c)  $1,61 \cdot 10^{15} - 2,8 \cdot 10^{17}$

a)  $3,18 \cdot 10^5 + 2,63 \cdot 10^3 = 318 \cdot 10^3 + 2,63 \cdot 10^3 = 320,63 \cdot 10^3 = 3,2063 \cdot 10^5$

b)  $1,3 \cdot 10^{-2} - 3,75 \cdot 10^{-4} = 130 \cdot 10^{-4} - 3,75 \cdot 10^{-4} = 126,25 \cdot 10^{-4} = 1,2625 \cdot 10^{-2}$

c)  $1,61 \cdot 10^{15} - 2,8 \cdot 10^{17} = 1,61 \cdot 10^{15} - 280 \cdot 10^{15} = -278,39 \cdot 10^{15} = -2,7839 \cdot 10^{17}$

**Recuerda**

Para sumar o restar números en notación científica, expresamos todos los términos en un mismo orden de magnitud, sacamos factor común la potencia de 10 y sumamos o restamos los números decimales.

9. ¿Cuántos segundos transcurrieron desde las 12 del mediodía del 15 de abril de 1985 y las 12 de la noche del 15 de agosto del mismo año? Expresa el resultado en notación científica.

Entre esas dos fechas han pasado 122 días y 12 horas.

Pasando a segundos estas cantidades:

$122 \text{ días} = 122 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 10540800 \text{ s}$

$12 \text{ horas} = 12 \cdot 60 \cdot 60 = 43200 \text{ s}$

$10540800 + 43200 = 10584000 = 1,0584 \cdot 10^7$

Transcurrieron  $1,0584 \cdot 10^7 \text{ s}$ .

10. La masa de la Tierra es  $5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ , y la de la Luna,  $7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ , aproximadamente. ¿Cuántas veces es mayor la masa de la Tierra que la de la Luna?

$5,97 \cdot 10^{24} : 7,35 \cdot 10^{22} = 0,8122 \cdot 10^2 = 81,22$

La masa de la Tierra es 81,22 veces mayor que la de la Luna.

**Recuerda**

Para multiplicar o dividir números en notación científica, operamos por un lado los números decimales y, por otro, las potencias de base 10.

# Evaluación B

1. Calcula el resultado de las siguientes potencias.

- a)  $3^2$                       b)  $3^{-2}$                       c)  $(-3)^{-2}$                       d)  $-3^2$                       e)  $-3^{-2}$                       f)  $(-3)^2$
- a)  $3^2 = 9$                       d)  $-3^2 = -9$
- b)  $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$                       e)  $-3^{-2} = -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9}$
- c)  $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$                       f)  $(-3)^2 = 9$

### Ten en cuenta

Al calcular una potencia, recuerda la importancia de los paréntesis.

$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$$

$$-2^2 = -2 \cdot 2 = -4$$

2. Expresa estos números en forma de potencia de base 3.

- a) 243                      b)  $\frac{1}{81}$                       c)  $\frac{10}{2430}$                       d) 0,1
- a)  $243 = 3^5$                       b)  $\frac{1}{81} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$                       c)  $\frac{10}{2430} = \frac{1}{3^5} = 3^{-5}$                       d)  $0,1 = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$

3. Escribe cada término como producto de factores primos y simplifica el resultado.

- a)  $\frac{72 \cdot 98 \cdot 27}{28 \cdot 108 \cdot 63}$                       b)  $\frac{216 \cdot 24 \cdot 1000}{80 \cdot 2025 \cdot 48}$
- a)  $\frac{72 \cdot 98 \cdot 27}{28 \cdot 108 \cdot 63} = \frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 7^2 \cdot 3^3}{2^2 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 3^2 \cdot 7} = \frac{2^4 \cdot 3^5 \cdot 7^2}{2^4 \cdot 3^5 \cdot 7^2} = 1$
- b)  $\frac{216 \cdot 24 \cdot 1000}{80 \cdot 2025 \cdot 48} = \frac{2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 5^3}{2^4 \cdot 5 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 2^4 \cdot 3} = \frac{2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^3}{2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^3} = \frac{2}{3}$

4. Simplifica estas expresiones utilizando las propiedades de las potencias.

- a)  $\frac{32^2 \cdot 6^4 \cdot 12^3}{8^3 \cdot 18^2 \cdot 27}$                       b)  $\frac{121^{-2} \cdot 55^4 \cdot 9^{-1}}{15^3 \cdot 45^{-3} \cdot 125}$
- a)  $\frac{32^2 \cdot 6^4 \cdot 12^3}{8^3 \cdot 18^2 \cdot 27} = \frac{(2^5)^2 \cdot (2 \cdot 3)^4 \cdot (2^2 \cdot 3)^3}{(2^3)^3 \cdot (2 \cdot 3^2)^2 \cdot 3^3} = \frac{2^{10} \cdot 2^4 \cdot 3^4 \cdot 2^6 \cdot 3^3}{2^9 \cdot 2^2 \cdot 3^4 \cdot 3^3} = \frac{2^{20} \cdot 3^7}{2^{11} \cdot 3^7} = 2^9$
- b)  $\frac{121^{-2} \cdot 55^4 \cdot 9^{-1}}{15^3 \cdot 45^{-3} \cdot 125} = \frac{45^3 \cdot 55^4}{15^3 \cdot 125 \cdot 121^2 \cdot 9} = \frac{(3^2 \cdot 5)^3 \cdot (5 \cdot 11)^4}{(3 \cdot 5)^3 \cdot 5^3 \cdot (11^2)^2 \cdot 3^2} = \frac{3^6 \cdot 5^7 \cdot 11^4}{3^5 \cdot 5^6 \cdot 11^4} = 3 \cdot 5$

5. Halla el valor de x en cada caso.

- a)  $-625 = -5^x$                       b)  $1024 = (2^2)^x$                       c)  $\frac{1}{1331} = x^{-3}$
- a)  $-625 = -5^4 \rightarrow x = 4$                       b)  $1024 = 2^{10} = 2^{2x} \rightarrow x = 5$                       c)  $\frac{1}{1331} = \frac{1}{11^3} = 11^{-3} \rightarrow x = 11$



6. Se quiere construir un cubo metálico con un volumen de  $1728 \text{ m}^3$  para adornar la plaza del pueblo. ¿Cuál debe ser la longitud de cada lado? ¿Qué cantidad de metal se necesitará para construirlo?

El volumen de un cubo es  $V = l^3$ .

Como conocemos el volumen y queremos calcular el lado, tendremos que calcular su raíz cúbica.

$$l = \sqrt[3]{1728} = 12 \text{ m}$$

La longitud de cada lado debe ser 12 m.

Para calcular la cantidad de metal, hallamos el área total del cubo.

$$A_T = 6 \cdot A_L = 6 \cdot l^2 = 6 \cdot 12^2 = 864 \text{ m}^2$$

Se necesitarán  $864 \text{ m}^2$  de metal.

7. Expresa estos números en notación científica y ordénalos de menor a mayor.

0,00000127      0,0003891      0,00001      0,0987

$$\left. \begin{array}{l} 0,00000127 = 1,27 \cdot 10^{-6} \\ 0,0003891 = 3,891 \cdot 10^{-4} \\ 0,00001 = 10^{-5} \\ 0,0987 = 9,87 \cdot 10^{-2} \end{array} \right\} \rightarrow 1,27 \cdot 10^{-6} < 10^{-5} < 3,891 \cdot 10^{-4} < 9,87 \cdot 10^{-2}$$

**Ten en cuenta**

En notación científica, el número mayor es el que tiene el mayor exponente.

8. Calcula las siguientes sumas y restas en notación científica.

a)  $2,115 \cdot 10^7 + 1,63 \cdot 10^5$       b)  $3,39 \cdot 10^{-3} - 2,51 \cdot 10^{-4}$       c)  $9,1 \cdot 10^8 - 2,58 \cdot 10^9$

a)  $2,115 \cdot 10^7 + 1,63 \cdot 10^5 = 211,5 \cdot 10^5 + 1,63 \cdot 10^5 = 213,13 \cdot 10^5 = 2,1313 \cdot 10^7$

b)  $3,39 \cdot 10^{-3} - 2,51 \cdot 10^{-4} = 33,9 \cdot 10^{-4} - 2,51 \cdot 10^{-4} = 31,39 \cdot 10^{-4} = 3,139 \cdot 10^{-3}$

c)  $9,1 \cdot 10^8 - 2,58 \cdot 10^9 = 9,1 \cdot 10^8 - 25,8 \cdot 10^8 = -16,7 \cdot 10^8 = -1,67 \cdot 10^9$

9. Realiza las siguientes multiplicaciones y divisiones en notación científica.

a)  $2,115 \cdot 10^7 \cdot 1,63 \cdot 10^5$       b)  $3,39 \cdot 10^{-3} : 2,51 \cdot 10^{-4}$       c)  $9,1 \cdot 10^8 \cdot 2,58 \cdot 10^9$

a)  $2,115 \cdot 10^7 \cdot 1,63 \cdot 10^5 = 3,44745 \cdot 10^{12}$

b)  $3,39 \cdot 10^{-3} : 2,51 \cdot 10^{-4} = 1,3506 \cdot 10$

c)  $9,1 \cdot 10^8 \cdot 2,58 \cdot 10^9 = 23,478 \cdot 10^{17} = 2,3478 \cdot 10^{18}$

10. El municipio de Valsaín se encuentra situado aproximadamente a 15 km de Segovia. ¿Cuál es la distancia en milímetros? Si en coche tardamos 24 min aproximadamente en recorrer esa distancia y hacemos ese trayecto dos veces al día todos los días del año, ¿cuántos segundos emplearemos en total? Expresa los resultados en notación científica.

Pasamos 15 km a milímetros:  $15 \text{ km} = 15000000 \text{ mm} = 1,5 \cdot 10^7 \text{ mm}$

La distancia entre los dos municipios es  $1,5 \cdot 10^7 \text{ mm}$ .

Al año se hacen  $365 \cdot 2 = 730$  trayectos.

$$730 \cdot 24 = 17520 \text{ min} = 1051200 \text{ s} = 1,0512 \cdot 10^6 \text{ s}$$

Emplearemos  $1,0512 \cdot 10^6 \text{ s}$  en total.

# Evaluación C

1. Expresa el resultado de estas operaciones como una potencia de exponente positivo.

a)  $5^{-20} \cdot 5^{18}$

b)  $(3^2)^{-3} : \frac{1}{3^4}$

c)  $2^{-16} : \left(\frac{1}{2}\right)^{21}$

d)  $\frac{(2^{-3})^{-2}}{\frac{1}{2^2}}$

a)  $5^{-20} \cdot 5^{18} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2}$

c)  $2^{-16} : \left(\frac{1}{2}\right)^{21} = 2^{-16} : 2^{-21} = 2^{-16-(-21)} = 2^5$

b)  $(3^2)^{-3} : \frac{1}{3^4} = 3^{-6} : 3^{-4} = 3^{-6-(-4)} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2}$

d)  $\frac{(2^{-3})^{-2}}{\frac{1}{2^2}} = \frac{2^6}{2^{-2}} = 2^{6-(-2)} = 2^8$

2. Expresa estos números como potencia de base 5.

a) 3 125

b)  $\frac{1}{625}$

c)  $\frac{2}{250}$

d)  $3,2 \cdot 10^{-4}$

a)  $3\,125 = 5^5$

b)  $\frac{1}{625} = \frac{1}{5^4} = 5^{-4}$

c)  $\frac{2}{250} = \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} = 5^{-3}$

d)  $3,2 \cdot 10^{-4} = 0,00032 = \frac{32}{100\,000} = \frac{1}{3\,125} = \frac{1}{5^5} = 5^{-5}$

3. Escribe en forma de una única potencia.

a)  $3^{12} \cdot 3^{-5} : 3^6$

b)  $(-7)^3 : (-7)^{-4} \cdot (-7)^{-1}$

c)  $(5^{-3})^3 : \frac{1}{5^8}$

d)  $\frac{2}{((2^2)^{5-3})}$

a)  $3^{12} \cdot 3^{-5} : 3^6 = 3^{12+(-5)-6} = 3$

b)  $(-7)^3 : (-7)^{-4} \cdot (-7)^{-1} = (-7)^{3-(-4)-1} = (-7)^6$

c)  $(5^{-3})^3 : \frac{1}{5^8} = 5^{-9} : 5^{-8} = 5^{-9-(-8)} = 5^{-1}$

d)  $\frac{2}{((2^2)^{5-3})} = \frac{2}{2^{-30}} = 2 : 2^{-30} = 2^{1-(-30)} = 2^{31}$

4. Simplifica las siguientes expresiones.

a)  $\frac{6^{-3} \cdot 50^2 \cdot 3^{-7}}{30^{-2} \cdot 10^5}$

b)  $\frac{2^{-4} \cdot 21^3 \cdot 56^{-1}}{49^{-4} \cdot 108^6}$

a)  $\frac{6^{-3} \cdot 50^2 \cdot 3^{-7}}{30^{-2} \cdot 10^5} = \frac{50^2 \cdot 30^2}{6^3 \cdot 3^7 \cdot 10^5} = \frac{(2 \cdot 5^2)^2 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^2}{(2 \cdot 3)^3 \cdot 3^7 \cdot (2 \cdot 5)^5} = \frac{2^2 \cdot 5^4 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 3^7 \cdot 2^5 \cdot 5^5} = 2^{-4} \cdot 3^{-8} \cdot 5$

b)  $\frac{2^{-4} \cdot 21^3 \cdot 56^{-1}}{49^{-4} \cdot 108^6} = \frac{49^4 \cdot 21^3}{2^4 \cdot 56 \cdot 108^6} = \frac{(7^2)^4 \cdot (3 \cdot 7)^3}{2^4 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot (2^2 \cdot 3^3)^6} = \frac{7^8 \cdot 3^3 \cdot 7^3}{2^4 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot 2^{12} \cdot 3^{18}} = \frac{7^{11} \cdot 3^3}{2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 7} = 2^{-19} \cdot 3^{-15} \cdot 7^{10}$

5. Halla el valor de x en cada caso.

a)  $-512 = -2^x$

b)  $\frac{1}{36} = 6^{1+x}$

c)  $-243 = (-3)^{-x}$

a)  $-512 = -2^9 = -2^x \rightarrow x = 9$

b)  $\frac{1}{36} = \frac{1}{6^2} = 6^{-2} = 6^{1+x} \rightarrow x = -3$

c)  $-243 = (-3)^5 = (-3)^{-x} \rightarrow x = -5$

6. Completa los exponentes que faltan en las siguientes igualdades.

a)  $2\,893\,000\,000 = 2,893 \cdot 10^{\boxed{9}}$

c)  $31\,040\,000 = 3,104 \cdot 10^{\boxed{7}}$

b)  $-0,013\,089 = 13,089 \cdot 10^{\boxed{-2}}$

d)  $0,000\,000\,0049 = 4,9 \cdot 10^{\boxed{9}}$

7. Expresa en notación científica y opera.

a)  $0,000\,621 + 0,001\,8$

c)  $\frac{0,027 - 0,0045}{2\,500}$

b)  $(0,000\,12)^3$

d)  $\frac{683\,000 \cdot 8\,200}{0,000\,14}$

a)  $0,000\,621 + 0,001\,8 = 6,21 \cdot 10^{-4} + 1,8 \cdot 10^{-3} = 6,21 \cdot 10^{-4} + 18 \cdot 10^{-4} = 24,21 \cdot 10^{-4} = 2,421 \cdot 10^{-3}$

b)  $(0,000\,12)^3 = (1,2 \cdot 10^{-4})^3 = 1,728 \cdot 10^{-12}$

c)  $\frac{0,027 - 0,0045}{2\,500} = \frac{2,7 \cdot 10^{-2} - 4,5 \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 10^3} = \frac{27 \cdot 10^{-3} - 4,5 \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 10^3} = \frac{22,5 \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 10^3} = \frac{2,25 \cdot 10^{-2}}{2,5 \cdot 10^3} = 0,9 \cdot 10^{-5} = 9 \cdot 10^{-6}$

d)  $\frac{683\,000 \cdot 8\,200}{0,000\,14} = \frac{6,83 \cdot 10^5 \cdot 8,2 \cdot 10^3}{1,4 \cdot 10^{-4}} = \frac{56,006 \cdot 10^8}{1,4 \cdot 10^{-4}} = \frac{5,6006 \cdot 10^9}{1,4 \cdot 10^{-4}} = 4,0004 \cdot 10^{13}$

8. Indica cuál de estas afirmaciones es correcta.

a)  $3,5 \cdot 10^8 < 4,7 \cdot 10^7$

b)  $3,5 \cdot 10^8 > 4,7 \cdot 10^7$

c)  $3,5 \cdot 10^8 = 4,7 \cdot 10^7$

La afirmación correcta es la b) ya que cuando comparamos números del mismo signo expresados en notación científica es mayor el que tiene la potencia de 10 con mayor exponente.

9. Una librería tiene 20 estanterías. Cada estantería consta de 20 baldas en las cuales hay 20 libros con 20 capítulos de 20 páginas cada uno. ¿Cuántas páginas hay en total en la librería? Exprésalo mediante una potencia y en notación científica.

$$20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 = 20^5$$

$$20^5 = 3\,200\,000$$

En la librería hay 3 200 000 páginas.

10. Responde razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Un número negativo elevado a cualquier exponente es siempre negativo.

b) La notación científica sólo se utiliza para expresar cantidades muy grandes.

c)  $-4^2 = 16$

d)  $2^5 + 3^5 = 5^5$

a) FALSO. Si un número negativo se eleva a un exponente par, el resultado es positivo.

b) FALSO. También se utiliza para expresar cantidades muy pequeñas.

c) FALSO.  $-4^2 = 16$ . Para ser 16 debería ser  $(-4)^2 = 16$ .

d) FALSO. No hay ninguna propiedad para la suma de potencias con distinto exponente.

# Evaluación D

1. Ordena de menor a mayor las siguientes potencias.

$$3^{-4} \quad (-2)^{-3} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^6 \quad (-3)^{-2}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} \\ (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} \\ (-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9} \end{array} \right\} \rightarrow -\frac{1}{8} < \frac{1}{81} < \frac{1}{64} < \frac{1}{9} \rightarrow (-2)^{-3} < 3^{-4} < \left(\frac{1}{2}\right)^6 < (-3)^{-2}$$

2. Expresa los siguientes números en forma de potencia de base 7.

a) 117 649                      b)  $\frac{1}{2401}$                       c)  $\frac{2}{686}$                       d)  $\frac{1}{49^{-2}}$

a)  $117\,649 = 7^6$                       c)  $\frac{2}{686} = \frac{1}{343} = \frac{1}{7^3} = 7^{-3}$

b)  $\frac{1}{2401} = \frac{1}{7^4} = 7^{-4}$                       d)  $\frac{1}{49^{-2}} = \frac{1}{(7^2)^{-2}} = \frac{1}{7^{-4}} = 7^4$

3. Escribe como una única potencia y simplifica.

a)  $9^3 \cdot 3^2 : 81$                       b)  $(81^4 : 27^4) \cdot 2^4$                       c)  $10^6 : (-2)^6 \cdot 5^3 : 2^9$                       d)  $((-2)^3)^4 : (8^{-4} : 4^{-4})$

a)  $9^3 \cdot 3^2 : 81 = (3^2)^3 \cdot 3^2 : 3^4 = 3^6 \cdot 3^2 : 3^4 = 3^4$

b)  $(81^4 : 27^4) \cdot 2^4 = 3^4 \cdot 2^4 = 6^4$

c)  $10^6 : (-2)^6 \cdot 5^3 : 2^9 = (-5)^6 \cdot 5^3 : 2^9 = 5^6 \cdot 5^3 : 2^9 = 5^9 : 2^9 = \left(\frac{5}{2}\right)^9$

d)  $((-2)^3)^4 : (8^{-4} : 4^{-4}) = (-2)^{12} : 2^{-4} = 2^{12} : 2^{-4} = 2^{16}$

4. Corrige las siguientes expresiones.

a)  $3^2 \cdot 3^3 = 3^6$                       b)  $8^4 : 2^4 = 4^0$                       c)  $-2^4 = 16$                       d)  $3^4 \cdot 3^2 \cdot 3 = 3^6$

a)  $3^2 \cdot 3^3 = 3^5$                       b)  $8^4 : 2^4 = 4^4$                       c)  $-2^4 = -16$                       d)  $3^4 \cdot 3^2 \cdot 3 = 3^7$

5. Simplifica estas expresiones expresándolas previamente como producto de primos.

a)  $\frac{8^2 \cdot 25^{-4} \cdot 200^3}{5^{-3} \cdot 80^2 \cdot 100^{-2}}$                       b)  $\frac{15\,000 \cdot 9\,000 \cdot 375}{21\,600 \cdot 3\,125 \cdot 750}$

a)  $\frac{8^2 \cdot 25^{-4} \cdot 200^3}{5^{-3} \cdot 80^2 \cdot 100^{-2}} = \frac{5^3 \cdot 8^2 \cdot 200^3 \cdot 100^2}{80^2 \cdot 25^4} = \frac{5^3 \cdot (2^3)^2 \cdot (2^3 \cdot 5^2)^3 \cdot (2^2 \cdot 5^2)^2}{(2^4 \cdot 5)^2 \cdot (5^2)^4} = \frac{5^3 \cdot 2^6 \cdot 2^9 \cdot 5^6 \cdot 2^4 \cdot 5^4}{2^8 \cdot 5^2 \cdot 5^8} =$   
 $= \frac{2^{19} \cdot 5^{13}}{2^8 \cdot 5^{10}} = 2^{11} \cdot 5^3$

b)  $\frac{15\,000 \cdot 9\,000 \cdot 375}{21\,600 \cdot 3\,125 \cdot 750} = \frac{15 \cdot 9\,000 \cdot 375}{216 \cdot 3\,125 \cdot 75} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 3 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 3 \cdot 5^2} = \frac{2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^7}{2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^7} = 1$

6. Utilizando la calculadora, ordena de menor a mayor las siguientes expresiones:  $2^{3^5}$ ,  $3^{2^5}$ ,  $5^{3^2}$ ,  $3^{5^2}$

$$\left. \begin{array}{l} 2^{3^5} = 2^{243} = 1,41 \cdot 10^{73} \\ 3^{2^5} = 3^{32} = 1,85 \cdot 10^{15} \\ 5^{3^2} = 5^9 = 1,95 \cdot 10^6 \\ 3^{5^2} = 3^{25} = 8,47 \cdot 10^{11} \end{array} \right\} \rightarrow 5^{3^2} < 3^{5^2} < 3^{2^5} < 2^{3^5}$$

7. Realiza estas operaciones y expresa el resultado en notación científica.

a)  $3,45 \cdot 10^{-3} + 2,134 \cdot 10^{-4}$

c)  $2,06 \cdot 10^4 \cdot 3,1 \cdot 10^{-2}$

b)  $4,893 \cdot 10^8 - 2 \cdot 10^{11}$

d)  $7,34 \cdot 10^5 : (-1,16 \cdot 10^8)$

a)  $3,45 \cdot 10^{-3} + 2,134 \cdot 10^{-4} = 34,5 \cdot 10^{-4} + 2,134 \cdot 10^{-4} = 36,634 \cdot 10^{-4} = 3,6634 \cdot 10^{-3}$

b)  $4,893 \cdot 10^8 - 2 \cdot 10^{11} = 4,893 \cdot 10^8 - 2000 \cdot 10^8 = -1995,107 \cdot 10^8 = -1,995107 \cdot 10^{11}$

c)  $2,06 \cdot 10^4 \cdot 3,1 \cdot 10^{-2} = 6,386 \cdot 10^2$

d)  $7,34 \cdot 10^5 : (-1,16 \cdot 10^8) = -6,3276 \cdot 10^{-3}$

8. Se estima que la población mundial es de  $7,25 \cdot 10^9$  habitantes repartidos en 200 países, aproximadamente. Si se repartieran en partes iguales todos los habitantes entre los países, ¿cuántos habitantes habría por país? Expresa el resultado en notación científica y en notación decimal.

$$7,25 \cdot 10^9 : 200 = 0,03625 \cdot 10^9 = 3,625 \cdot 10^7$$

$$3,625 \cdot 10^7 = 36250000$$

Habría 36250000 habitantes en cada país.

9. El cubo de Rubik es un rompecabezas tridimensional compuesto por pequeños cubos que forman un cubo más grande. ¿Cuántos cubos lo forman? Si quisiéramos formar el siguiente cubo más grande, ¿cuántos cubos tendría? ¿Y el siguiente?

Lo forman  $3^3 = 27$  cubos.

El siguiente tendría  $4^3 = 64$  cubos, y el siguiente,  $5^3 = 125$  cubos.

10. Sabiendo que la velocidad de la luz es de 300000 km/s, ¿cuántos metros recorre a lo largo de un año? Expresa el resultado en notación científica.

En primer lugar calculamos los segundos que tiene un año.

$$365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 31536000 \text{ s}$$

Como cada segundo recorre 300000 km, en un año recorrerá  $31536000 \cdot 300000 = 9460800000000 \text{ km}$ .

$$9460800000000 \text{ km} = 9460800000000000 \text{ m} = 9,4608 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

A lo largo de un año recorre  $9,4608 \cdot 10^{15} \text{ m}$ .

# POLINOMIOS

## Evaluación A

1. Expresa estas frases con lenguaje algebraico.

- a) El cuadrado de la suma de dos números.      c) La mitad del cubo de un número.  
b) El producto de dos números consecutivos.      d) Un quinto de la diferencia de dos números.
- a)  $(a+b)^2$       b)  $a \cdot (a+1)$       c)  $\frac{a^3}{2}$       d)  $\frac{a-b}{5}$

2. Realiza las siguientes operaciones con monomios.

- a)  $3x^2y \cdot (-2xy^3z)$       b)  $16x^3y^2 : (-4xy^2)$       c)  $\frac{1}{5}xyz^2 : \left(\frac{5}{3}x^2y^2z\right)$       d)  $-3ab^2c \cdot 2a^3b$
- a)  $3x^2y \cdot (-2xy^3z) = -6x^3y^4z$       c)  $\frac{1}{5}xyz^2 : \left(\frac{5}{3}x^2y^2z\right) = \frac{3z}{25xy}$   
b)  $16x^3y^2 : (-4xy^2) = -4x^2$       d)  $-3ab^2c \cdot 2a^3b = -6a^4b^3c$

3. ¿Cuál es el valor numérico de estas expresiones para los valores que se indican? Calcula.

- a)  $2a + 4b - ab$  para  $a = -3, b = 2$       c)  $2 - z^2 + 3x$  para  $z = 1, x = -2$   
b)  $\frac{-3xy^2}{z}$  para  $x = -4, y = -2, z = 5$       d)  $5xy - z^2$  para  $x = -1, y = 7, z = 3$

### Ten en cuenta

Al sustituir las variables por valores negativos, lo hacemos siempre entre paréntesis para evitar errores.

- a)  $2 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 - (-3) \cdot 2 = -6 + 8 + 6 = 8$       c)  $2 - 1^2 + 3 \cdot (-2) = 2 - 1 - 6 = -5$   
b)  $\frac{-3 \cdot (-4) \cdot (-2)^2}{5} = \frac{48}{5}$       d)  $5 \cdot (-1) \cdot 7 - 3^2 = -35 - 9 = -44$

4. De los siguientes valores, señala los que son raíz de este polinomio:  $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

- a)  $x = 0$       b)  $x = 2$       c)  $x = 3$       d)  $x = -1$
- a)  $P(0) = 0^3 - 7 \cdot 0^2 + 16 \cdot 0 - 12 = 0 - 0 + 0 - 12 = -12 \neq 0 \rightarrow$  No es raíz.  
b)  $P(2) = 2^3 - 7 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2 - 12 = 8 - 28 + 32 - 12 = 0 \rightarrow$  Sí es raíz.  
c)  $P(3) = 3^3 - 7 \cdot 3^2 + 16 \cdot 3 - 12 = 27 - 63 + 48 - 12 = 0 \rightarrow$  Sí es raíz.  
d)  $P(-1) = (-1)^3 - 7 \cdot (-1)^2 + 16 \cdot (-1) - 12 = -1 - 7 - 16 - 12 = -36 \neq 0 \rightarrow$  No es raíz.

### Recuerda

$a$  es raíz de  $P(x)$  si  $P(a) = 0$ .

5. Considera los polinomios:

$$A(x) = 2x^2 - 3x + 5$$

$$B(x) = -x^3 + x - 4$$

$$C(x) = 3x^2 - 3$$

Calcula:

- a)  $A(x) + B(x) + C(x)$       b)  $2A(x) - B(x) - C(x)$       c)  $4C(x) - B(x)$
- a)  $A(x) + B(x) + C(x) = 2x^2 - 3x + 5 - x^3 + x - 4 + 3x^2 - 3 = -x^3 + 5x^2 - 2x - 2$   
b)  $2A(x) - B(x) - C(x) = 2(2x^2 - 3x + 5) - (-x^3 + x - 4) - (3x^2 - 3) = 4x^2 - 6x + 10 + x^3 - x + 4 - 3x^2 + 3 = x^3 + x^2 - 7x + 17$   
c)  $4C(x) - B(x) = 4(3x^2 - 3) - (-x^3 + x - 4) = 12x^2 - 12 + x^3 - x + 4 = x^3 + 12x^2 - x - 8$

6. Realiza la siguiente operación con polinomios.

$$\frac{x^2 + x}{3} + \frac{2x - 1}{6} - \frac{5x}{3} + \frac{-x^2 + 5}{2}$$

$$\frac{x^2 + x}{3} + \frac{2x - 1}{6} - \frac{5x}{3} + \frac{-x^2 + 5}{2} = \frac{2x^2 + 2x}{6} + \frac{2x - 1}{6} - \frac{10x}{6} + \frac{-3x^2 + 15}{6} =$$

$$= \frac{2x^2 + 2x + 2x - 1 - 10x - 3x^2 + 15}{6} = \frac{-x^2 - 6x + 14}{6} = -\frac{1}{6}x^2 - x + \frac{7}{3}$$

7. Desarrolla las siguientes identidades notables.

a)  $(3x + 2y)^2$

b)  $(2x^2 - 3)^2$

c)  $(2x + 3y)(2x - 3y)$

d)  $\left(4xy - \frac{1}{3}x^2\right)^2$

a)  $(3x + 2y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$

b)  $(2x^2 - 3)^2 = (2x^2)^2 - 2 \cdot 2x^2 \cdot 3 + 3^2 = 4x^4 - 12x^2 + 9$

c)  $(2x + 3y)(2x - 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$

d)  $\left(4xy - \frac{1}{3}x^2\right)^2 = (4xy)^2 - 2 \cdot 4xy \cdot \frac{1}{3}x^2 + \left(\frac{1}{3}x^2\right)^2 = 16x^2y^2 - \frac{8}{3}x^3y + \frac{1}{9}x^4$

**Recuerda**

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

8. Completa estos desarrollos de identidades notables.

a)  $(3x - 2)^2 = 9x^2 - \boxed{12x} + 4$

c)  $\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = x^4 - \boxed{\frac{1}{4}}$

b)  $(2x^2 + 4z)^2 = \boxed{4x^2} + 16z^2 + 16x^2z$

d)  $(3xz - x^2)^2 = 9x^2z^2 - \boxed{6x^3z} + x^4$

9. Escribe las siguientes expresiones como el cuadrado de un binomio.

a)  $x^2 - 4x + 4$

c)  $x^2 - 14x + 49$

b)  $4y^2 + 4y + 1$

d)  $x^2 + x + \frac{1}{4}$

a)  $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$

c)  $x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$

b)  $4y^2 + 4y + 1 = (2y + 1)^2$

d)  $x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

10. De un triángulo rectángulo se sabe que la hipotenusa mide  $2x + 5$  cm y uno de los catetos  $x - 2$  cm. ¿Qué expresión corresponde a la medida del otro cateto?

Resolvemos mediante el teorema de Pitágoras.

El cateto que falta viene dado por la expresión:  $\sqrt{(2x + 5)^2 - (x - 2)^2}$

Operando y simplificando:

$$\sqrt{(2x + 5)^2 - (x - 2)^2} = \sqrt{4x^2 + 20x + 25 - (x^2 - 4x + 4)} = \sqrt{3x^2 + 24x + 21}$$

# Evaluación B

1. Indica el grado, el coeficiente principal y el término independiente de estos polinomios.

- a)  $7x^5 - 6x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5$   
 b)  $-x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 7$   
 c)  $\frac{x^6}{2} - \frac{4x^5}{3} + \frac{3x^2}{4} + \frac{2x}{7}$

**Recuerda**

**Coeficiente principal:** término de mayor grado.  
**Grado del polinomio:** grado del coeficiente principal.  
**Término independiente:** término de grado 0.

- a)  $7x^5 - 6x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5 \rightarrow$  Grado 5, coeficiente principal 7, término independiente  $-5$ .  
 b)  $-x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 7 \rightarrow$  Grado 6, coeficiente principal  $-1$ , término independiente  $-7$ .  
 c)  $\frac{x^6}{2} - \frac{4x^5}{3} + \frac{3x^2}{4} + \frac{2x}{7} \rightarrow$  Grado 6, coeficiente principal  $\frac{1}{2}$ , no tiene término independiente.

2. Halla para qué valor de  $a$  se cumple que  $P(1) = -5$  siendo  $P(x) = -x^3 + ax^2 + 5x - 4$ .

Sustituyendo en el polinomio:

$$P(1) = -1^3 + a \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 4 = -5 \rightarrow -1 + a + 5 - 4 = -5 \rightarrow a = -5$$

3. Dados los polinomios  $A(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ,  $B(x) = -5x^3 + 2x - 1$  y  $C(x) = 4x^2 - 5$ , calcula:

- a)  $A(x) + B(x) + C(x)$                       b)  $2A(x) - B(x) - C(x)$                       c)  $A(x) \cdot C(x) - B(x)$
- a)  $A(x) + B(x) + C(x) = 3x^2 - 2x + 1 + (-5x^3 + 2x - 1) + (4x^2 - 5) =$   
 $= 3x^2 - 2x + 1 - 5x^3 + 2x - 1 + 4x^2 - 5 = -5x^3 + 7x^2 - 5$   
 b)  $2A(x) - B(x) - C(x) = 2(3x^2 - 2x + 1) - (-5x^3 + 2x - 1) - (4x^2 - 5) =$   
 $= 6x^2 - 4x + 2 + 5x^3 - 2x + 1 - 4x^2 + 5 = 5x^3 + 2x^2 - 6x + 8$   
 c)  $A(x) \cdot C(x) - B(x) = (3x^2 - 2x + 1)(4x^2 - 5) - (-5x^3 + 2x - 1) =$   
 $= 12x^4 - 15x^2 - 8x^3 + 10x + 4x^2 - 5 + 5x^3 - 2x + 1 = 12x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 8x - 4$

4. Realiza las siguientes divisiones de polinomios entre monomios.

- a)  $(2x^3y^2 - 5x^2y^2 + 6xy^3) : (-2xy)$                       b)  $(-6abc + 4ab^2c + 2a^2b^3c) : (3ab)$
- a)  $(2x^3y^2 - 5x^2y^2 + 6xy^3) : (-2xy) = -x^2y + \frac{5}{2}xy - 3y^2$   
 b)  $(-6abc + 4ab^2c + 2a^2b^3c) : (3ab) = -2c + \frac{4}{3}bc + \frac{2}{3}ab^2c$

5. Reduce a común denominador y simplifica.

$$\frac{3x^2 + 2x}{5} - \frac{x - 4}{2} + \frac{x^2 - 3x}{10} - \frac{-x^2 - 2x}{4}$$

$$\frac{3x^2 + 2x}{5} - \frac{x - 4}{2} + \frac{x^2 - 3x}{10} - \frac{-x^2 - 2x}{4} = \frac{12x^2 + 8x}{20} - \frac{10x - 40}{20} + \frac{2x^2 - 6x}{20} - \frac{-5x^2 - 10x}{20} =$$

$$= \frac{12x^2 + 8x - 10x + 40 + 2x^2 - 6x + 5x^2 + 10x}{20} = \frac{19x^2 + 2x + 40}{20} = \frac{19x^2}{20} + \frac{1}{10}x + 2$$



6. Desarrolla las siguientes identidades notables.

a)  $(-3x^2 - 4y)^2$       b)  $(-6 + z^2)^2$       c)  $(2xy - 4z^2)(2xy + 4z^2)$       d)  $\left(1 + \frac{x}{y}\right)^2$

a)  $(-3x^2 - 4y)^2 = (3x^2)^2 + 2 \cdot 3x^2 \cdot 4y + (4y)^2 = 9x^4 + 24x^2y + 16y^2$

b)  $(-6 + z^2)^2 = 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot z^2 + (z^2)^2 = 36 - 12z^2 + z^4$

c)  $(2xy - 4z^2)(2xy + 4z^2) = (2xy)^2 - (4z^2)^2 = 4x^2y^2 - 16z^4$

d)  $\left(1 + \frac{x}{y}\right)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{x}{y} + \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1 + \frac{2x}{y} + \frac{x^2}{y^2}$

**Recuerda**

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2$$

$$(-a + b)^2 = (a - b)^2$$

7. Realiza las siguientes operaciones con polinomios.

a)  $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 - (x + 1)(x - 1)$       b)  $(2x - 3)^2 + (3x + 2)^2$

a)  $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 - (x + 1)(x - 1) = x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 1) = x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 - x^2 + 1 = x^2 + 3$

b)  $(2x - 3)^2 + (3x + 2)^2 = 4x^2 - 12x + 9 + 9x^2 + 12x + 4 = 13x^2 + 13$

8. Escribe la expresión algebraica que corresponda en cada caso.

- a) El área de un cuadrado de lado  $x$ .
- b) El perímetro de un cuadrado de lados  $x$  e  $y$ .
- c) El área de un círculo de radio  $r$ .
- d) El volumen de una esfera de diámetro  $d$ .

a)  $x^2$       b)  $2x + 2y$       c)  $\pi \cdot r^2$       d)  $\frac{4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3}{3}$

9. Saca factor común y emplea los productos notables para descomponer en factores los siguientes polinomios.

a)  $2x^4 - 12x^3 + 18x^2$       b)  $45x^5 + 30x^4 + 5x^3$

a)  $2x^4 - 12x^3 + 18x^2 = 2x^2(x^2 - 6x + 9) = 2x^2(x - 3)^2$

b)  $45x^5 + 30x^4 + 5x^3 = 5x^3(9x^2 + 6x + 1) = 5x^3(3x + 1)^2$

10. Calcula el volumen de un cubo cuya arista mide  $2x - 3$  metros.

El volumen de un cubo de arista  $l$  viene dado por la fórmula  $V = l^3$ . En nuestro caso,  $V = (2x - 3)^3$

Haciendo cálculos:  $V = (2x - 3)^3 = (2x - 3)^2(2x - 3) = (4x^2 - 12x + 9)(2x - 3) = 8x^3 - 12x^2 - 24x^2 + 36x + 18x - 27 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 \text{ m}^3$

# Evaluación C

1. Expresa mediante lenguaje algebraico las siguientes expresiones.

a) El cubo del producto de dos números.

c) La diferencia del cuadrado de dos números.

b) La suma de dos números pares consecutivos.

d) La sexta parte de la raíz cúbica de un número.

a)  $(x \cdot y)^3$

b)  $2x + (2x + 2)$

c)  $x^2 - y^2$

d)  $\frac{\sqrt[3]{x}}{6}$

2. Calcula el valor numérico del polinomio  $x^4 - x^3 + 5x^2 - 6$  para  $x = 2$  y  $x = -1$ .

Para  $x = 2 \rightarrow 2^4 - 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 6 = 16 - 8 + 20 - 6 = 22$

Para  $x = -1 \rightarrow (-1)^4 - (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 - 6 = 1 - (-1) + 5 \cdot 1 - 6 = 1 + 1 + 5 - 6 = 1$

3. Halla el valor numérico del polinomio  $x^5 - 4x^3 - 11x^2 + 3x - 7$  para  $x = -1$ ,  $x = 3$  y  $x = 0$ .

Para  $x = -1 \rightarrow (-1)^5 - 4 \cdot (-1)^3 - 11 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 7 = -1 + 4 - 11 - 3 - 7 = -18$

Para  $x = 3 \rightarrow (3)^5 - 4 \cdot (3)^3 - 11 \cdot (3)^2 + 3 \cdot (3) - 7 = 243 + 108 - 99 - 9 - 7 = 250$

Para  $x = 0 \rightarrow 0^5 - 4 \cdot 0^3 - 11 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 7 = -7$

4. Resuelve estas operaciones con polinomios.

a)  $(x^3 - 2x^2)(3x - 7)$

b)  $(2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 6x - 1) - (4x^3 - 2x^2 + 5x - 3)$

c)  $(4x^2 - 2x + 1)(-x^3 + 2x^2 + 5x - 3)$

d)  $(2x^4 + 5x^3 + x^2 - 6) + (-4x^3 - 2x^2 + x - 1) - (3x^2 + 5x - 6)$

a)  $(x^3 - 2x^2)(3x - 7) = 3x^4 - 7x^3 - 6x^3 + 14x^2 = 3x^4 - 13x^3 + 14x^2$

b)  $(2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 6x - 1) - (4x^3 - 2x^2 + 5x - 3) =$   
 $= 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 6x - 1 - 4x^3 + 2x^2 - 5x + 3 = 2x^4 + x^3 - x^2 + x + 2$

c)  $(4x^2 - 2x + 1)(-x^3 + 2x^2 + 5x - 3) = -4x^5 + 8x^4 + 20x^3 - 12x^2 + 2x^4 -$   
 $- 4x^3 - 10x^2 + 6x - x^3 + 2x^2 + 5x - 3 = -4x^5 + 10x^4 + 15x^3 - 20x^2 + 11x - 3$

d)  $(2x^4 + 5x^3 + x^2 - 6) + (-4x^3 - 2x^2 + x - 1) - (3x^2 + 5x - 6) =$   
 $= 2x^4 + 5x^3 + x^2 - 6 - 4x^3 - 2x^2 + x - 1 - 3x^2 - 5x + 6 = 2x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x - 1$

5. Reduce a común denominador y simplifica.

$$\frac{-x^2 + 4x}{6} - \frac{3x + 4}{3} + \frac{3x^2 + 5x}{5} - \frac{x^2 - 3x}{4}$$
$$\frac{-x^2 + 4x}{6} - \frac{3x + 4}{3} + \frac{3x^2 + 5x}{5} - \frac{x^2 - 3x}{4} = \frac{-10x^2 + 40x}{60} - \frac{60x + 80}{60} + \frac{36x^2 + 60x}{60} - \frac{15x^2 - 45x}{60} =$$
$$= \frac{-10x^2 + 4x - 60x - 80 + 36x^2 + 60x - 15x^2 - 45x}{60} = \frac{11x^2 + 85x - 80}{60} = \frac{11}{60}x^2 + \frac{17}{10}x - \frac{4}{3}$$

6. Completa las siguientes identidades notables.

a)  $x^2 + 6xy + 9y^2 = (\boxed{x} + \boxed{3y})^2$

b)  $4x^2 - 1 = (\boxed{2x} + \boxed{1})(\boxed{2x} - \boxed{1})$

c)  $49x^4 + \boxed{14x^2} + 1 = (\boxed{7x^2} + \boxed{1})^2$

d)  $x^4 - 10x^2y + 25y^2 = (\boxed{x^2} - \boxed{5y})^2$

e)  $4x^2 - 20xy + 25y^2 = (\boxed{2x} - \boxed{5y})^2$

f)  $9 - \boxed{16x^4} = (\boxed{3} + 4x^2)(\boxed{3} - \boxed{4x^2})$

7. Extrae factor común e identifica las identidades notables para factorizar.

a)  $12x^3 - 36x^2 + 27x$

b)  $4x^4 + 40x^3 + 100x^2$

a)  $12x^3 - 36x^2 + 27x = 3x(4x^2 - 12x + 9) = 3x(2x - 3)^2$

b)  $4x^4 + 40x^3 + 100x^2 = 4x^2(x^2 + 10x + 25) = 4x^2(x + 5)^2$

8. Realiza las siguientes operaciones con polinomios.

a)  $(2x - 1)^2 - (2x + 1)(2x - 1)$

b)  $(x^2 - 3)^2 + (x^2 + 5)^2$

a)  $(2x - 1)^2 - (2x + 1)(2x - 1) = 4x^2 - 4x + 1 - (4x^2 - 1) = 4x^2 - 4x + 1 - 4x^2 + 1 = -4x + 2$

b)  $(x^2 - 3)^2 + (x^2 + 5)^2 = x^4 - 6x^2 + 9 + x^4 + 10x^2 + 25 = 2x^4 + 4x^2 + 34$

9. Responde razonadamente si estas afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Al sumar o restar dos polinomios de grado 3, el resultado es un polinomio de grado 3.

b) Para poder multiplicar monomios no es necesario que sean semejantes.

c) El polinomio  $x^5 - 4x^3 + 2x - 3$  no tiene coeficiente principal.

d) Las identidades notables se utilizan para calcular el cubo de un binomio.

a) FALSO. Por ejemplo:  $(2x^3 - 3x^2 + 5x + 7) + (-2x^3 + 15x - 3) = -3x^2 + 20x + 4$

b) VERDADERO. Sólo es necesario que sean semejantes para sumar o restar monomios.

c) FALSO. El coeficiente principal es 1.

d) FALSO. Se utilizan para calcular el cuadrado de un binomio o un producto de suma por diferencia.

10. El ancho de una caja de cartón mide  $x$  metros. Si el alto mide el doble que el ancho, y el largo el triple, calcula en función de  $x$ :

a) El volumen de la caja.

b) El área de la caja.

Si el ancho mide  $x$ , el alto mide  $2x$  y el ancho  $3x$ .

a)  $V = a \cdot b \cdot c = x \cdot 2x \cdot 3x = 6x^3 \text{ m}^3$

b)  $A = 2ab + 2ac + 2bc = 2 \cdot x \cdot 2x + 2 \cdot x \cdot 3x + 2 \cdot 2x \cdot 3x = 22x^2 \text{ m}^2$

# Evaluación D

1. ¿De cuál de estos polinomios es  $x = -1$  raíz?

a)  $P(x) = -x^3 - 1$     b)  $Q(x) = x^4 - 2x^2 + 1$     c)  $R(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$     d)  $S(x) = x^2 + x + 1$

a)  $P(-1) = -(-1)^3 - 1 = 1 - 1 = 0 \rightarrow$  Sí es raíz.

b)  $Q(-1) = (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0 \rightarrow$  Sí es raíz.

c)  $R(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 1 = -1 + 3 - 3 + 1 = 0 \rightarrow$  Sí es raíz.

d)  $S(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0 \rightarrow$  No es raíz.

2. Realiza la siguiente operación con polinomios:  $\frac{x^2 - 3x}{2} + \frac{4x + 1}{6} - \frac{-x^3 + 5x}{3} + \frac{x^2 - 7}{4}$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3x}{2} + \frac{4x + 1}{6} - \frac{-x^3 + 5x}{3} + \frac{x^2 - 7}{4} &= \frac{6x^2 - 18x}{12} + \frac{8x + 2}{12} - \frac{-4x^3 + 20x}{12} + \frac{3x^2 - 21}{12} = \\ &= \frac{6x^2 - 18x + 8x + 2 - (-4x^3 + 20x) + 3x^2 - 21}{12} = \\ &= \frac{6x^2 - 18x + 8x + 2 + 4x^3 - 20x + 3x^2 - 21}{12} = \frac{4x^3 + 9x^2 - 30x - 19}{12} \end{aligned}$$

3. Desarrolla estas igualdades notables.

a)  $(2a - 2z)^2$

c)  $(3x^2 + 5y)^2$

e)  $(-1 - x^4)^2$

b)  $(4 + y^2)(4 - y^2)$

d)  $\left(\frac{1}{2} + z^2\right)^2$

f)  $(x^2 - x^3)^2$

a)  $(2a - 2z)^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 2z + (2z)^2 = 4a^2 - 8az + 4z^2$

b)  $(4 + y^2)(4 - y^2) = 4^2 - (y^2)^2 = 16 - y^4$

c)  $(3x^2 + 5y)^2 = (3x^2)^2 + 2 \cdot 3x^2 \cdot 5y + (5y)^2 = 9x^4 + 30x^2y + 25y^2$

d)  $\left(\frac{1}{2} + z^2\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot z^2 + (z^2)^2 = \frac{1}{4} + z^2 + z^4$

e)  $(-1 - x^4)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot x^4 + (x^4)^2 = 1 + 2x^4 + x^8$

f)  $(x^2 - x^3)^2 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot x^3 + (x^3)^2 = x^4 - 2x^5 + x^6$

4. Extrae factor común en cada caso.

a)  $-2x^3y + 3x^2z + 6x^2t - 2xyz$

c)  $8x^3z + 4x^2y - 2x^2t^2 + 6x^4$

b)  $2a^2bc - 3ab^2c + 4abc^2$

d)  $15xy^2 - 5x^2z + 10y^2z$

a)  $-2x^3y + 3x^2z + 6x^2t - 2xyz = x(-2x^2y + 3xz + 6xt - 2yz)$

b)  $2a^2bc - 3ab^2c + 4abc^2 = abc(2a - 3b + 4c)$

c)  $8x^3z + 4x^2y - 2x^2t^2 + 6x^4 = 2x^2(4xz + y - t^2 + 3x^2)$

d)  $15xy^2 - 5x^2z + 10y^2z = 5(3xy^2 - x^2z + 2y^2z)$

5. Halla el dividendo de una división si sabemos que el divisor es  $3x - 1$ , el cociente  $4x^3 + 6x^2 - 5x - 1$  y el resto, 5.

Sabemos que: dividendo es igual a divisor por cociente más resto. Operando:

$$\begin{aligned} \text{Dividendo: } (3x - 1)(4x^3 + 6x^2 - 5x - 1) + 5 &= 12x^4 + 18x^3 - 15x^2 - 3x - 4x^3 - 6x^2 + 5x + 1 + 5 = \\ &= 12x^4 + 14x^3 - 21x^2 + 2x + 6 \end{aligned}$$

6. Realiza las siguientes operaciones con polinomios.

a)  $(y - 2)^2 + (y + 2)(y - 2) - 2y^2$

b)  $(x^2 - x)^2 + (x^2 + x)^2$

a)  $(y - 2)^2 + (y + 2)(y - 2) - 2y^2 = y^2 - 4y + 4 + y^2 - 4 - 2y^2 = -4y$

b)  $(x^2 - x)^2 + (x^2 + x)^2 = x^4 - 2x^3 + x^2 + x^4 + 2x^3 + x^2 = 2x^4 + 2x^2$

7. Determina el valor de  $m$  en el polinomio  $x^5 - 4mx^4 - 3x^2 + 5x - 6$  para que al hallar el valor numérico para  $x = 1$ , el resultado sea 12.

Sustituyendo y resolviendo la ecuación tenemos:

$$P(1) = 1^5 - 4 \cdot m \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 6 = 12 \rightarrow 1 - 4m - 3 + 5 - 6 = 12 \rightarrow -4m = 15 \rightarrow m = -\frac{15}{4}$$

8. Escribe la expresión algebraica que corresponda en cada caso.

- a) La suma de tres números consecutivos.
- b) El producto de un número y su mitad.
- c) La cuarta parte de la diferencia de dos números.
- d) El cuadrado de la mitad de un número.

a)  $x + (x + 1) + (x + 2)$

b)  $x \cdot \frac{x}{2}$

c)  $\frac{x - y}{4}$

d)  $\left(\frac{x}{2}\right)^2$

9. Completa los siguientes desarrollos de identidades notables.

a)  $(2x + 3)^2 = 4x^2 + \boxed{12x} + 9$

c)  $(x + 3y)(x - 3y) = x^2 - \boxed{9y^2}$

b)  $\left(x^2 - \frac{z}{2}\right)^2 = x^4 + \frac{z^2}{4} - \boxed{x^2z}$

d)  $(x^2y - x^2)^2 = x^4y^2 - \boxed{2x^4y} + x^4$

10. El radio de un cilindro mide  $2x - 3$  centímetros, y su altura,  $3x$  centímetros. ¿Cuánto mide su volumen?

El volumen de un cilindro viene dado por la fórmula:  $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Sustituimos los datos en la fórmula.

$$V = \pi(2x - 3)^2 \cdot 3x$$

Desarrollando y simplificando la expresión:

$$V = \pi(2x - 3)^2 \cdot 3x = \pi(4x^2 - 12x + 9) \cdot 3x = \pi(12x^3 - 36x^2 + 18x) \text{ cm}^3$$

# ECUACIONES

## Evaluación A

1. Comprueba si  $x = 3$  es solución de alguna de estas ecuaciones.

a)  $3x - 2(2x - 1) = -1$       b)  $\frac{x-1}{2} - \frac{2x}{3} = 4$       c)  $x^2 - 4x + 3 = 0$       d)  $2x^2 - 5x - 10 = 0$

Sustituimos  $x = 3$  en cada ecuación y vemos en cuáles se cumple la igualdad.

a)  $3 \cdot 3 - 2(2 \cdot 3 - 1) = 9 - 2(6 - 1) = 9 - 2 \cdot 5 = 9 - 10 = -1 \rightarrow$  Sí es solución.

b)  $\frac{3-1}{2} - \frac{2 \cdot 3}{3} = \frac{2}{2} - \frac{6}{3} = 1 - 2 = -1 \neq 4 \rightarrow$  No es solución.

c)  $3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0 \rightarrow$  Sí es solución.

d)  $2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 - 10 = 2 \cdot 9 - 15 - 10 = 18 - 15 - 10 = -7 \neq 0 \rightarrow$  No es solución.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado.

a)  $3(x - 1) - 2(-1 - 4x) = 5(-2x + 3)$

b)  $2(x + 7) + 3 = 4(x - 3) - 7$

a)  $3(x - 1) - 2(-1 - 4x) = 5(-2x + 3) \rightarrow 3x - 3 + 2 + 8x = -10x + 15 \rightarrow 3x + 8x + 10x =$   
 $= 15 + 3 - 2 \rightarrow 21x = 16 \rightarrow x = \frac{16}{21}$

b)  $2(x + 7) + 3 = 4(x - 3) - 7 \rightarrow 2x + 14 + 3 = 4x - 12 - 7 \rightarrow 2x - 4x =$   
 $= -12 - 7 - 14 - 3 \rightarrow -2x = -36 \rightarrow x = \frac{-36}{-2} = 18$

3. Álvaro le pregunta a María por su edad y ella contesta: «Si al triple de la edad que tengo le restas la mitad de la que tenía el año pasado, obtienes la edad que tendré dentro de 14 años». Halla la edad de María.

Si llamamos  $x$  a la edad de María, el año pasado tenía  $x - 1$  y dentro de 14 años tendrá  $x + 14$ . Planteamos la ecuación y la resolvemos.

$$3x - \frac{x-1}{2} = x + 14 \rightarrow \frac{6x}{2} - \frac{x-1}{2} = \frac{2x+28}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 6x - x + 1 = 2x + 28 \rightarrow 6x - x - 2x = 28 - 1 \rightarrow 3x = 27 \rightarrow x = \frac{27}{3} = 9$$

María tiene 9 años.

4. Valeria se gastó  $\frac{1}{5}$  del dinero que tenía ahorrado en invitar a sus amigos a su cumpleaños,  $\frac{3}{4}$  del dinero restante en ropa y aún le sobraron 10 €. ¿Cuánto dinero tenía ahorrado?

Llamamos  $x$  al dinero que tiene ahorrado Valeria y planteamos y resolvemos la ecuación.

$$\frac{1}{5}x + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}x + 10 = x \rightarrow \frac{x}{5} + \frac{12x}{20} + 10 = x \rightarrow \frac{x}{5} + \frac{3x}{5} + 10 = x \rightarrow \frac{x}{5} + \frac{3x}{5} + \frac{50}{5} = \frac{5x}{5} \rightarrow$$
$$\rightarrow x + 3x + 50 = 5x \rightarrow x = 50$$

Tenía ahorrado 50 €.

### Ten en cuenta

El primer paso para resolver un problema es identificar la incógnita,  $x$ .

5. Resuelve esta ecuación de primer grado con denominadores:  $\frac{3x-1}{4} + \frac{x-2}{3} + 1 = \frac{2x-4}{6} + \frac{x-2}{5}$

$$\frac{3x-1}{4} + \frac{x-2}{3} + 1 = \frac{2x-4}{6} + \frac{x-2}{5} \rightarrow \frac{45x-15}{60} + \frac{20x-40}{60} + \frac{60}{60} = \frac{20x-40}{60} + \frac{12x-24}{60} \rightarrow$$

$$\rightarrow 45x - 15 + 20x - 40 + 60 = 20x - 40 + 12x - 24 \rightarrow 33x = -69 \rightarrow x = \frac{-69}{-33} = \frac{23}{11}$$

6. Halla la solución de la siguiente ecuación:  $(x-2)^2 + (2x-1)^2 = 6x^2 - (x+1)^2$

$$(x-2)^2 + (2x-1)^2 = 6x^2 - (x+1)^2 \rightarrow x^2 - 4x + 4 + 4x^2 - 4x + 1 = 6x^2 - (x^2 + 2x + 1) \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 4x + 4 + 4x^2 - 4x + 1 = 6x^2 - x^2 - 2x - 1 \rightarrow x^2 - 4x + 4x^2 - 4x - 6x^2 + x^2 + 2x =$$

$$= -4 - 1 - 1 \rightarrow -6x = -6 \rightarrow x = 1$$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a)  $3x^2 - 4x + 1 = 0$

b)  $-x^2 + x + 6 = 0$

a)  $x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = 1 \end{cases}$

b)  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-2} = \frac{-1 \pm 5}{-2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

**Recuerda**

Las soluciones de la ecuación de segundo grado  $ax^2 + bx + c = 0$  se obtienen mediante la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

8. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su área es 117 cm<sup>2</sup> y la base mide 4 cm más que la altura.

Si llamamos  $x$  a la altura del rectángulo, la base medirá  $x + 4$ . Como el área es  $A = b \cdot a$ , entonces:

$$x(x+4) = 117 \rightarrow x^2 + 4x - 117 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-117)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 468}}{2} =$$

$$= \frac{-4 \pm 22}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = -13 \end{cases}$$

Nos quedamos con la solución positiva ya que  $x$  es una longitud. Por tanto, la altura mide 9 cm, y la base, 13 cm.

9. Resuelve estas ecuaciones de segundo grado incompletas.

a)  $9x^2 - 1 = 0$

b)  $16x^2 + 8x = 0$

a)  $9x^2 - 1 = 0 \rightarrow 9x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{9}} = \pm \frac{1}{3}$

b)  $16x^2 + 8x = 0 \rightarrow 8x(2x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} 8x = 0 \rightarrow x = 0 \\ 2x+1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

**Recuerda**

Ecuaciones incompletas:

■  $ax^2 + bx = 0 \rightarrow$  Extraemos factor común y resolvemos dos ecuaciones de primer grado.

■  $ax^2 + c = 0 \rightarrow$  Despejamos  $x^2$  y resolvemos la raíz cuadrada.

10. Halla las soluciones de esta ecuación:  $\frac{2x^2-1}{2} - \frac{x-1}{3} = \frac{1-2x}{6}$

$$\frac{2x^2-1}{2} - \frac{x-1}{3} = \frac{1-2x}{6} \rightarrow \frac{6x^2-3}{6} - \frac{2x-2}{6} = \frac{1-2x}{6} \rightarrow 6x^2 - 3 - 2x + 2 = 1 - 2x \rightarrow 6x^2 = 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

# Evaluación B

1. Señala cuáles de estas ecuaciones son equivalentes a  $3x + 6 = 2x + 3$ .

a)  $-2x = 6$

b)  $x + 7 = 11$

c)  $4x - 1 = 5$

d)  $5x - 3 = -18$

Resolvemos la ecuación y vemos cuáles de las ecuaciones tienen esa solución.

$$3x + 6 = 2x + 3 \rightarrow 3x - 2x = 3 - 6 \rightarrow x = -3$$

a)  $-2x = 6 \rightarrow x = -3 \rightarrow$  Sí es equivalente.

b)  $x + 7 = 11 \rightarrow x = 4 \rightarrow$  No es equivalente.

c)  $4x - 1 = 5 \rightarrow 4x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \rightarrow$  No es equivalente.

d)  $5x - 3 = -18 \rightarrow 5x = -15 \rightarrow x = -3 \rightarrow$  Sí es equivalente.

### Recuerda

Dos ecuaciones de primer grado son equivalentes si tienen la misma solución.

2. Resuelve la siguiente ecuación de primer grado.

$$\frac{2x-3}{5} - \frac{3x-2}{2} - 4 = \frac{x-3}{4} - \frac{2x-6}{5}$$

$$\frac{2x-3}{5} - \frac{3x-2}{2} - 4 = \frac{x-3}{4} - \frac{2x-6}{5}$$

$$\frac{8x-12}{20} - \frac{30x-20}{20} - \frac{80}{20} = \frac{5x-15}{20} - \frac{8x-24}{20}$$

$$8x - 12 - 30x + 20 - 80 = 5x - 15 - 8x + 24$$

$$8x - 30x - 5x + 8x = -15 + 24 + 12 - 20 + 80 \rightarrow -19x = 81 \rightarrow x = -\frac{81}{19}$$

### Ten en cuenta

Al eliminar denominadores, un signo  $-$  delante de una fracción cambia el signo a todos los términos.

3. Celia ha repartido 100 € entre sus tres hijas. A Nuria le ha dado el doble que a Raquel más 5 € y Ruth ha recibido 10 € menos que el triple de Nuria. ¿Cuánto dinero ha recibido cada una?

Llamamos  $x$  al dinero que ha recibido Raquel.

Entonces Nuria habrá recibido  $2x + 5$ , y Ruth,  $3(2x + 5) - 10$ .

Planteamos la ecuación y la resolvemos.

$$x + (2x + 5) + 3(2x + 5) - 10 = 100 \rightarrow x + 2x + 5 + 6x + 15 - 10 = 100 \rightarrow 9x = 90 \rightarrow x = 10$$

Raquel recibe 10 €, Nuria  $2 \cdot 10 + 5 = 25$  €, y Ruth,  $3 \cdot 25 - 10 = 65$  €.

4. La diferencia entre los tres cuartos de un número y los dos tercios de ese mismo número es 1. ¿De qué número se trata?

Llamando  $x$  al número que buscamos, planteamos y resolvemos la ecuación.

$$\frac{3x}{4} - \frac{2x}{3} = 1 \rightarrow \frac{9x}{12} - \frac{8x}{12} = \frac{12}{12} \rightarrow 9x - 8x = 12 \rightarrow x = 12$$

Se trata del número 12.

5. Calcula el valor de  $m$  en la ecuación  $x^2 - mx - 3 = 0$  para que  $x = 4$  sea una de sus soluciones.

Sustituimos  $x = 4$  en la ecuación y hallamos  $m$ .

$$4^2 - m \cdot 4 - 3 = 0 \rightarrow 16 - 4m - 3 = 0 \rightarrow -4m = -13 \rightarrow m = \frac{13}{4}$$



6. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a)  $8x^2 - 6x + 1 = 0$

b)  $3x^2 + 2x - 8 = 0$

a)  $8x^2 - 6x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 1}}{2 \cdot 8} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{16} = \frac{6 \pm 2}{16} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \end{cases}$

b)  $3x^2 + 2x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{6} = \frac{-2 \pm 10}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ x_2 = \frac{-12}{6} = -2 \end{cases}$

7. Halla, sin resolverlas, el número de soluciones de estas ecuaciones de segundo grado.

a)  $3x^2 - 5x + 2 = 0$

c)  $x^2 - 6x + 9 = 0$

b)  $x^2 + x + 1 = 0$

d)  $3x^2 - 5x + 9 = 0$

Calculamos el discriminante en cada caso.

a)  $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 - 24 = 1 > 0 \rightarrow$  Tiene dos soluciones.

b)  $b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0 \rightarrow$  No tiene solución.

c)  $b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0 \rightarrow$  Tiene una solución doble.

d)  $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9 = 25 - 108 = -83 < 0 \rightarrow$  No tiene solución.

**Recuerda**

Dada la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$ :

- Si  $b^2 - 4ac > 0 \rightarrow$  tiene dos soluciones.
- Si  $b^2 - 4ac = 0 \rightarrow$  tiene una solución doble.
- Si  $b^2 - 4ac < 0 \rightarrow$  no tiene solución.

8. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas.

a)  $3x^2 - 7x = 0$

b)  $4x^2 = 1$

c)  $-2x^2 + x = 0$

d)  $2x^2 + 8 = 0$

a)  $3x^2 - 7x = 0 \rightarrow x(3x - 7) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 7 = 0 \rightarrow x = \frac{7}{3} \end{cases}$

b)  $4x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$

c)  $-2x^2 + x = 0 \rightarrow x(-2x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$

d)  $2x^2 + 8 = 0 \rightarrow 2x^2 = -8 \rightarrow x^2 = -\frac{8}{2} = -4 \rightarrow x = \pm \sqrt{-4} \rightarrow$  No tiene solución.

**Recuerda**

- La ecuación  $ax^2 + bx = 0$  siempre tiene dos soluciones y una de ellas es  $x = 0$ .
- La ecuación  $ax^2 + c = 0$  tiene dos soluciones si  $a$  y  $c$  tienen el mismo signo; si tienen distinto signo, no hay soluciones.

9. Halla la solución de esta ecuación:  $x^2(x^2 - 2) = (x^2 + 2)(x^2 - 2) + 12$

$x^2(x^2 - 2) = (x^2 + 2)(x^2 - 2) + 12 \rightarrow x^4 - 2x^2 = x^4 - 4 + 12 \rightarrow -2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = \frac{8}{-2} = -4 \rightarrow x = \pm \sqrt{-4}$

La ecuación no tiene solución.

10. El producto de dos números consecutivos menos el mayor de ellos es igual a 120. Halla los dos números.

Llamamos  $x$  y  $x + 1$  a los dos números consecutivos. Planteamos y resolvemos la ecuación.

$x(x + 1) - (x + 1) = 120 \rightarrow x^2 + x - x - 1 = 120 \rightarrow x^2 = 121 \rightarrow x = \pm \sqrt{121} = \pm 11$

Los números consecutivos pueden ser 11 y 12 o -11 y -10.

# Evaluación C

1. Comprueba cuál de estos valores es solución de la ecuación  $4x - 5 = 3x + 5$ .

- a)  $x = 8$                       b)  $x = 10$                       c)  $x = 3$                       d)  $x = -2$

Sustituimos cada uno de los valores a ambos lados de la ecuación.

- a)  $4 \cdot 8 - 5 = 27$ ;  $3 \cdot 8 + 5 = 29 \rightarrow x = 8$  no es solución de la ecuación.  
b)  $4 \cdot 10 - 5 = 35$ ;  $3 \cdot 10 + 5 = 35 \rightarrow x = 10$  es solución de la ecuación.  
c)  $4 \cdot 3 - 5 = 7$ ;  $3 \cdot 3 + 5 = 14 \rightarrow x = 3$  no es solución de la ecuación.  
d)  $4 \cdot (-2) - 5 = -13$ ;  $3 \cdot (-2) + 5 = -1 \rightarrow x = -2$  no es solución de la ecuación.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado.

- a)  $-(4x - 2) + 3(-2 + x) = 2(-3x + 5)$                       b)  $-5x - (-2x + 1) - 12 = 3(2x - 3) + 5$

a)  $-(4x - 2) + 3(-2 + x) = 2(-3x + 5) \rightarrow -4x + 2 - 6 + 3x = -6x + 10 \rightarrow$   
 $\rightarrow -4x + 3x + 6x = 10 - 2 + 6 \rightarrow 5x = 14 \rightarrow x = \frac{14}{5}$

b)  $-5x - (-2x + 1) - 12 = 3(2x - 3) + 5 \rightarrow -5x + 2x - 1 - 12 = 6x - 9 + 5 \rightarrow$   
 $\rightarrow -5x + 2x - 6x = -9 + 5 + 1 + 12 \rightarrow -9x = 9 \rightarrow x = \frac{9}{-9} = -1$

3. Resuelve esta ecuación de primer grado con denominadores:  $\frac{3x - 1}{4} - \frac{x + 6}{2} = \frac{2x + 1}{3} - \frac{x - 3}{6}$

$$\frac{3x - 1}{4} - \frac{x + 6}{2} = \frac{2x + 1}{3} - \frac{x - 3}{6} \rightarrow \frac{9x - 3}{12} - \frac{6x + 36}{12} = \frac{8x + 4}{12} - \frac{2x - 6}{12} \rightarrow$$
$$\rightarrow 9x - 3 - (6x + 36) = 8x + 4 - (2x - 6) \rightarrow 9x - 3 - 6x - 36 = 8x + 4 - 2x + 6 \rightarrow$$
$$\rightarrow 9x - 6x - 8x + 2x = 4 + 6 + 3 + 36 \rightarrow -3x = 49 \rightarrow x = -\frac{49}{3}$$

4. Se han comprado 12 balones y 3 bicicletas, y se han pagado 1050 €. Calcula el precio de un balón y una bicicleta sabiendo que cada bicicleta vale 200 € más que un balón.

Llamamos  $x$  al precio de un balón y  $x + 200$  al precio de una bicicleta.

Plantemos y resolvemos la ecuación.

$$12x + 3(x + 200) = 1050 \rightarrow 12x + 3x + 600 = 1050 \rightarrow 15x = 450 \rightarrow x = \frac{450}{15} = 30$$

El balón cuesta 30 € y la bicicleta  $30 + 200 = 230$  €.

5. Resuelve las siguientes ecuaciones.

- a)  $(2x - 1)(x + 3) - (x + 1)^2 = 0$                       b)  $(2x - 3)(3x - 1) - (2 - x)(3 + x) = -3$

a)  $(2x - 1)(x + 3) - (x + 1)^2 = 0 \rightarrow 2x^2 + 6x - x - 3 - x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-8}{2} = -4 \end{cases}$$

b)  $(2x - 3)(3x - 1) - (2 - x)(3 + x) = -3 \rightarrow 6x^2 - 2x - 9x + 3 - 6 - 2x + 3x + x^2 = -3 \rightarrow$

$$\rightarrow 7x^2 - 10x = 0 \rightarrow x(7x - 10) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 7x - 10 = 0 \rightarrow x = \frac{10}{7} \end{cases}$$

6. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 3 y -3.

Las soluciones 3 y -3 son de signo contrario por lo que la ecuación es incompleta de la forma  $ax^2 + b = 0$ .

Al ser raíces cuadradas de 9, la ecuación es:  $x^2 - 9 = 0$

7. Halla las soluciones de estas ecuaciones.

a)  $3x(x - 3) = 5x^2 - 2(x + 4) - 7x$

b)  $2x(1 - x) = (x + 1)^2 + 3x - 1$

a)  $3x(x - 3) = 5x^2 - 2(x + 4) - 7x \rightarrow 3x^2 - 9x = 5x^2 - 2x - 8 - 7x \rightarrow -2x^2 = -8 \rightarrow$   
 $\rightarrow x^2 = \frac{-8}{-2} = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

b)  $2x(1 - x) = (x + 1)^2 + 3x - 1 \rightarrow 2x - 2x^2 = x^2 + 2x + 1 + 3x - 1 \rightarrow 3x^2 + 3x = 0 \rightarrow$   
 $\rightarrow 3x(x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$

8. Resuelve esta ecuación:  $(x - 1)^2 + (2x - 3)^2 = (2 - x)^2$

$(x - 1)^2 + (2x - 3)^2 = (2 - x)^2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 12x + 9 = 4 - 4x + x^2 \rightarrow$   
 $\rightarrow x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 12x + 9 - 4 + 4x - x^2 = 0 \rightarrow 4x^2 - 10x + 6 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 6}}{2 \cdot 4} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{8} = \frac{10 \pm 2}{8} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{10 + 2}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{10 - 2}{8} = \frac{8}{8} = 1 \end{cases}$

9. Calcula la medida de los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que son tres números consecutivos.

Llamamos  $x$ ,  $x + 1$  y  $x + 2$  a los lados del triángulo, siendo  $x + 2$  la hipotenusa por ser el lado más largo. Aplicamos el teorema de Pitágoras y resolvemos la ecuación.

$(x + 2)^2 = (x + 1)^2 + x^2 \rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2x + 1 + x^2 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$

Al ser una longitud, nos quedamos con la solución positiva  $x = 3$ . Luego los lados miden 3, 4 y 5.

10. En una clase, la mitad de los alumnos cursan Ampliación de Matemáticas,  $\frac{1}{3}$  de los que quedan, Francés, y los 20 restantes, Cultura Clásica. ¿Cuántos alumnos hay en total?

Llamamos  $x$  al total de alumnos:  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}x + 20 = x \rightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{6} + 20 = x \rightarrow \frac{3x}{6} + \frac{x}{6} + \frac{120}{6} = \frac{6x}{6} \rightarrow$

$\rightarrow 3x + x + 120 = 6x \rightarrow 2x = 120 \rightarrow x = \frac{120}{2} = 60$  Hay 60 alumnos en 3.º de ESO.

# Evaluación D

1. Escribe dos ecuaciones equivalentes a  $3x - 1 = \frac{x}{2} + 14$ .

Resolvemos la ecuación:  $3x - 1 = \frac{x}{2} + 14 \rightarrow \frac{6x - 2}{2} = \frac{x}{2} + \frac{28}{2} \rightarrow 6x - 2 = x + 28 \rightarrow 5x = 30 \rightarrow x = 6$

Cualquier ecuación que tenga como solución  $x = 6$  es equivalente a la dada.

Por ejemplo,  $x + 1 = 7$  o  $2x = 12$ .

2. Resuelve la siguiente ecuación:  $\frac{3x - 2}{5} - \frac{2x + 3}{3} + 4 = \frac{-2(x + 3)}{10} - \frac{-x + 2}{4}$

$$\begin{aligned} \frac{3x - 2}{5} - \frac{2x + 3}{3} + 4 &= \frac{-2(x + 3)}{10} - \frac{-x + 2}{4} \rightarrow \frac{36x - 24}{60} - \frac{40x + 60}{60} + \frac{240}{60} = \frac{-12x - 36}{60} - \frac{-15x + 30}{60} \rightarrow \\ \rightarrow 36x - 24 - 40x - 60 + 240 &= -12x - 36 + 15x - 30 \rightarrow 36x - 40x + 12x - 15x = \\ = -36 - 30 + 24 + 60 - 240 &\rightarrow -7x = -222 \rightarrow x = \frac{222}{7} \end{aligned}$$

3. Hace 3 años la edad de David era el triple de la de Elena y dentro de 3 años será el doble. ¿Qué edad tiene cada uno?

	Hace 3 años	Hoy	Dentro de 3 años
Elena	$x$	$x + 3$	$x + 6$
David	$3x$	$3x + 3$	$3x + 6$

Planteamos y resolvemos la ecuación.

$$3x + 6 = 2(x + 6) \rightarrow 3x + 6 = 2x + 12 \rightarrow 3x - 2x = 12 - 6 \rightarrow x = 6$$

En la actualidad, Elena tiene  $6 + 3 = 9$  años, y David,  $3 \cdot 6 + 3 = 21$ .

4. Halla los valores de  $m$  en la ecuación  $3x^2 + mx + 3 = 0$  para que tenga una única solución.

Para que una ecuación de segundo grado tenga solo una solución tiene que cumplirse que el discriminante sea igual a 0, es decir,  $b^2 - 4ac = 0$ .

$$\text{En nuestra ecuación: } m^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 0 \rightarrow m^2 - 36 = 0 \rightarrow m = \pm\sqrt{36} = \pm 6$$

Para que la ecuación tenga una única solución,  $m = \pm 6$ .

5. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a)  $(2x + 1)^2 = 2(-4x - 4)$

b)  $\frac{x^2 + 3}{2} + \frac{3x + 1}{3} = \frac{x^2 + 8x - 7}{3}$

a)  $(2x + 1)^2 = 2(-4x - 4) \rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = -8x - 8 \rightarrow 4x^2 + 12x + 9 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} = \frac{-12}{8} = \frac{-3}{2} \text{ (solución doble)}$$

b)  $\frac{x^2 + 3}{2} + \frac{3x + 1}{3} = \frac{x^2 + 8x - 7}{3} \rightarrow \frac{3x^2 + 9}{6} + \frac{6x + 2}{6} = \frac{2x^2 + 16x - 14}{6} \rightarrow 3x^2 + 9 + 6x + 2 =$

$$= 2x^2 + 16x - 14 \rightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} =$$

$$= \frac{10}{2} = 5 \text{ (solución doble)}$$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a)  $(2x - 2)^2 - (x - 2)^2 = 0$

b)  $(1 - 3x)^2 + 3(2x + 4) = 13$

a)  $(2x - 2)^2 - (x - 2)^2 = 0 \rightarrow 4x^2 - 8x + 4 - x^2 + 4x - 4 = 0 \rightarrow 3x^2 - 4x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x(3x - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

b)  $(1 - 3x)^2 + 3(2x + 4) = 13 \rightarrow 1 - 6x + 9x^2 + 6x + 12 = 13 \rightarrow 9x^2 = 0 \rightarrow x = 0$  (solución doble)

7. Halla la solución de esta ecuación:  $(x + 1)^3 - (x - 1)^3 = 2$

$$(x + 1)^3 - (x - 1)^3 = 2 \rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 2 \rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 6x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{0} \rightarrow x = 0$$
 (solución doble)

8. Indica cuáles de las siguientes ecuaciones tiene  $x = 0$  como solución.

a)  $x^2 + 9 = 0$

b)  $3x - 4 = 2x - 4$

c)  $4x - 2x^2 = 0$

d)  $3x^3 = -2x^2$

a)  $0^2 + 9 = 9 \neq 0 \rightarrow$  No es solución.

b)  $3 \cdot 0 - 4 = 2 \cdot 0 - 4 \rightarrow -4 = -4 \rightarrow$  Sí es solución.

c)  $4 \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 = 0 \rightarrow$  Sí es solución.

d)  $3 \cdot 0^3 = -2 \cdot 0^2 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow$  Sí es solución.

9. El perímetro de un rectángulo es 92 cm. Si aumentamos la altura 2 cm y disminuimos la base 4 cm, el área del nuevo rectángulo se reduce 24 cm<sup>2</sup>. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

La suma de la base y la altura es la mitad del perímetro:  $92 : 2 = 46$  cm

Entonces, si llamamos  $x$  a la base, la altura sería  $46 - x$ .

El área del primer rectángulo es  $x(46 - x)$ , y la del segundo,  $(x - 4)(48 - x)$ .

Planteamos y resolvemos la ecuación.

$$x(46 - x) = (x - 4)(48 - x) + 24 \rightarrow 46x - x^2 = 48x - x^2 - 192 + 4x + 24 \rightarrow 6x = 168 \rightarrow x = \frac{168}{6} = 28$$

La base del nuevo rectángulo mide 24 cm, y la altura, 20 cm.

10. Un vehículo sale de Tobed a las 10 de la mañana a una velocidad constante de 80 km/h y 2 horas después, en la misma dirección, sale una moto a 110 km/h. ¿A qué hora le alcanzará?

Llamamos  $x$  al tiempo que transcurre desde que sale el vehículo hasta que se encuentran.

Planteamos y resolvemos la ecuación.

$$80x = 110(x - 2) \rightarrow 80x = 110x - 220 \rightarrow -30x = -220 \rightarrow x = \frac{-220}{-30} = 7,3 \text{ h} = 7 \text{ h } 20 \text{ min}$$

Le alcanzará a las 17:20 horas.

# SISTEMAS DE ECUACIONES

## Evaluación A

1. Determina cuáles de estos pares de números son solución de la siguiente ecuación lineal:  $3x + 2y = 7$

- a)  $x = 1, y = 2$                       b)  $x = 2, y = 1$                       c)  $x = 3, y = -1$                       d)  $x = -1, y = 5$

Sustituimos los valores de las incógnitas en cada ecuación y comprobamos si se cumple la igualdad.

- a)  $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7 \rightarrow$  Sí son solución.                      c)  $3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = 7 \rightarrow$  Sí son solución.  
 b)  $3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8 \neq 7 \rightarrow$  No son solución.                      d)  $3 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 = 7 \rightarrow$  Sí son solución.

2. Completa las tablas de modo que cada par de números  $(x, y)$  sea una solución de la ecuación lineal que se indica. ¿Cuál es la solución del sistema formado por ambas?

a)  $3x + 2y = 10$

x	1	2	3	4
y	$\frac{7}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	-1

b)  $2x - y = 2$

x	0	1	2	3
y	-2	0	2	4

La solución del sistema es  $x = 2, y = 2$ .

3. Resuelve el sistema  $\left. \begin{array}{l} 2x - 5y = 11 \\ x + 3y = -11 \end{array} \right\}$  mediante el método de sustitución.

Despejamos  $x$  en la segunda ecuación:  $x = -11 - 3y$

Sustituimos esa expresión en la primera ecuación y resolvemos.

$$2 \cdot (-11 - 3y) - 5y = 11 \rightarrow -22 - 6y - 5y = 11 \rightarrow -11y = 33 \rightarrow y = -3$$

Sustituimos el valor hallado en la expresión del primer paso para hallar  $x$ .

$$x = -11 - 3 \cdot (-3) = -11 + 9 = -2. \text{ Por tanto, la solución es: } x = -2, y = -3$$

### Ten en cuenta

**Método de sustitución:** se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y esa expresión se sustituye en la otra ecuación.

4. Resuelve el sistema  $\left. \begin{array}{l} 2x + y = 11 \\ 3x - y = 9 \end{array} \right\}$  mediante el método de igualación.

Despejamos  $y$  en las dos ecuaciones:  $y = 11 - 2x, y = 3x - 9$

$$\text{Igualamos y resolvemos: } 11 - 2x = 3x - 9 \rightarrow -5x = -20 \rightarrow x = 4$$

Sustituimos el valor hallado en cualquiera de las expresiones iniciales.

$$y = 11 - 2 \cdot 4 = 3. \text{ Por tanto, la solución es: } x = 4, y = 3$$

### Ten en cuenta

**Método de igualación:** se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y se igualan las expresiones.

5. Resuelve el sistema  $\left. \begin{array}{l} 2x + y = -1 \\ 4x + 3y = -7 \end{array} \right\}$  mediante el método de reducción.

Multiplicamos la primera ecuación por 2 para igualar coeficientes.

$$2x + y = -1 \xrightarrow{\cdot 2} 4x + 2y = -2$$

Restamos las ecuaciones y resolvemos la ecuación de primer grado para hallar  $y$ .

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 2y = -2 \\ -4x - 3y = 7 \end{array} \right\} \rightarrow -y = 5 \rightarrow y = -5$$

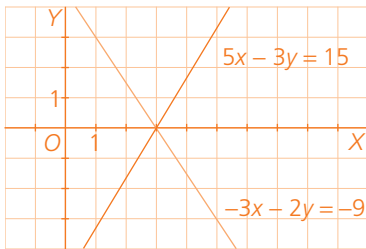
Sustituimos el valor obtenido en una de las ecuaciones iniciales y hallamos el valor de  $x$ .

$$2x - 5 = -1 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2. \text{ Por tanto, la solución es: } x = 2, y = -5$$

### Ten en cuenta

**Método de reducción:** se multiplican una o ambas ecuaciones por un número para igualar los coeficientes de una de las incógnitas.

6. Resuelve el sistema  $\begin{cases} 5x - 3y = 15 \\ -3x - 2y = -9 \end{cases}$  mediante el método gráfico.



Se observa en el dibujo que la solución es:  $x = 3, y = 0$

**Ten en cuenta**

**Método gráfico:** se representan las dos ecuaciones y se observan gráficamente los puntos de corte.

7. Simplifica el siguiente sistema y resuélvelo por el método que consideres más conveniente.

$$\begin{cases} 5x - 4y + 1 = 3(x + y) \\ 2x + 2(x - y + 1) + y - 1 = 2x + 3(y + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 4y + 1 = 3(x + y) \\ 2x + 2(x - y + 1) + y - 1 = 2x + 3(y + 1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x - 4y + 1 = 3x + 3y \\ 2x + 2x - 2y + 2 + y - 1 = 2x + 3y + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 7y = -1 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$$

Como los coeficientes de la incógnita  $x$  son iguales, elegimos resolver por el método de reducción.

$$\begin{cases} 2x - 7y = -1 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases} \rightarrow -3y = -3 \rightarrow y = 1$$

$$2x - 7 \cdot 1 = -1 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3 \quad \text{Por tanto, la solución es: } x = 3, y = 1$$

8. Mikel ha pagado 13 € por 2 kg de manzanas y 3 kg de naranjas, y Claudia ha pagado 11 € por 4 kg de manzanas y 1 kg de naranjas. ¿Cuánto cuesta el kilo de cada fruta?

Sean  $x$  el precio de un kilo de manzanas e  $y$  el de un kilo de naranjas.

El sistema que planteamos es:  $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$

Resolviéndolo por cualquier método, la solución es:  $x = 2, y = 3$

Por tanto, las manzanas cuestan 2 €/kg, y las naranjas, 3 €/kg.

9. Tenemos 27 billetes mezclados de 10 € y 20 €, en total, suman 420 €. ¿Cuántos billetes hay de cada tipo?

Sean  $x$  el número de billetes de 10 € e  $y$  el número de billetes de 20 €.

El sistema que planteamos es:  $\begin{cases} x + y = 27 \\ 10x + 20y = 420 \end{cases}$

Resolviéndolo por cualquier método, la solución es:  $x = 12, y = 15$

Por tanto, hay 12 billetes de 10 € y 15 billetes de 20 €.

10. Se mezclan varios kilos de azúcar de 3 €/kg con varios kilos de 5 €/kg. Se consigue una mezcla de 20 kg que se vende a 4,20 €/kg. ¿Qué cantidad de azúcar de cada tipo se ha mezclado?

Sean  $x$  los kilos de azúcar de 3 €/kg e  $y$  los kilos de azúcar de 5 €/kg.

Planteamos el sistema:  $\begin{cases} x + y = 20 \\ 3x + 5y = 84 \end{cases}$

Resolviéndolo por cualquier método, la solución es:  $x = 8, y = 12$

Por tanto, se mezclan 8 kg de azúcar de 3 €/kg con 12 kg de azúcar de 5 €/kg.

**Ten en cuenta**

	kg	€/kg	Precio
Azúcar 3 €/kg	$x$	3	$3x$
Azúcar 5 €/kg	$y$	5	$5y$
Mezcla	20	4,20	84

# Evaluación B

1. Halla el valor de  $a$  y  $b$  en el sistema  $\begin{cases} 2x - ay = 6 \\ bx + 2y = -1 \end{cases}$  para que el par de números  $x = 5, y = 1$  sea solución.

Sustituimos los valores  $x = 5, y = 1$  en el sistema, y resolvemos las dos ecuaciones resultantes.

$$\begin{cases} 2 \cdot 5 - a \cdot 1 = 6 \rightarrow 10 - a = 6 \rightarrow -a = -4 \rightarrow a = 4 \\ b \cdot 5 + 2 \cdot 1 = -1 \rightarrow 5b + 2 = -1 \rightarrow 5b = -3 \rightarrow b = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

2. Completa las tablas de modo que cada par de números  $(x, y)$  sea una solución de la ecuación lineal que se indica. ¿Cuál es la solución del sistema formado por ambas?

a)  $-x + y = -4$

$x$	1	2	3	4
$y$	-3	-2	-1	0

b)  $2x - y = 7$

$x$	1	2	3	4
$y$	-5	-3	-1	1

La solución del sistema es  $x = 3, y = -1$ .

3. Resuelve el siguiente sistema mediante el método de sustitución:  $\begin{cases} x + y = 0 \\ 6x - 7y = 39 \end{cases}$

Despejamos  $x$  en la primera ecuación:  $x = -y$

Sustituimos el valor de  $x$  en la segunda ecuación y resolvemos.

$$6 \cdot (-y) - 7y = 39 \rightarrow -6y - 7y = 39 \rightarrow -13y = 39 \rightarrow y = -3$$

Sustituimos el valor hallado en la expresión que hemos despejado en el primer paso para hallar  $x$ :  $x = -(-3) = 3$

Por tanto, la solución es:  $x = 3, y = -3$

4. Resuelve el siguiente sistema mediante el método de igualación:  $\begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ -5x + 6y = 78 \end{cases}$

Despejamos  $x$  en las dos ecuaciones:  $x = \frac{-2 - 2y}{3}, x = \frac{78 - 6y}{-5}$

Igualamos y resolvemos:  $\frac{-2 - 2y}{3} = \frac{78 - 6y}{-5} \rightarrow 10 + 10y = 234 - 18y \rightarrow 28y = 224 \rightarrow y = 8$

Sustituimos el valor hallado en cualquiera de las expresiones iniciales:  $x = \frac{-2 - 2 \cdot 8}{3} = \frac{-2 - 16}{3} = -6$

Por tanto, la solución es:  $x = -6, y = 8$

5. Resuelve el siguiente sistema mediante el método de reducción:  $\begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ 7x + 2y = 12 \end{cases}$

Multiplicamos la primera ecuación por 7 y la segunda por 4 para igualar coeficientes.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 11 \xrightarrow{\cdot 7} 28x + 21y = 77 \\ 7x + 2y = 12 \xrightarrow{\cdot 4} 28x + 8y = 48 \end{cases}$$

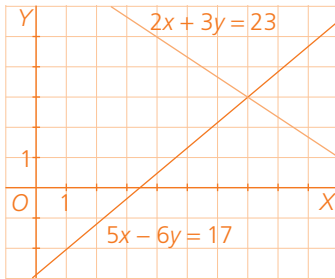
Restamos las ecuaciones y resolvemos para hallar  $y$ :  $\begin{cases} 28x + 21y = 77 \\ -28x - 8y = -48 \end{cases} \rightarrow 13y = 29 \rightarrow y = \frac{29}{13}$

Sustituimos el valor obtenido en una de las ecuaciones iniciales y hallamos  $x$ .

$$4x + 3 \cdot \frac{29}{13} = 11 \rightarrow 4x = \frac{56}{13} \rightarrow x = \frac{14}{13}. \text{ Por tanto, la solución es: } x = \frac{14}{13}, y = \frac{29}{13}$$



6. Resuelve el sistema  $\begin{cases} 2x + 3y = 23 \\ 5x - 6y = 17 \end{cases}$  mediante el método gráfico.



Se observa en el dibujo que la solución es:  $x = 7, y = 3$

7. Simplifica el sistema  $\begin{cases} \frac{-x+6}{2} + \frac{y+2}{3} = 4 \\ \frac{x+2}{4} + \frac{y-4}{3} = 1 \end{cases}$  y resuélvelo por el método que consideres más conveniente.

$$\left. \begin{cases} \frac{-x+6}{2} + \frac{y+2}{3} = 4 \\ \frac{x+2}{4} + \frac{y-4}{3} = 1 \end{cases} \right\} \rightarrow \begin{cases} -3x+18+2y+4 = 24 \\ 3x+6+4y-16 = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3x+2y = 2 \\ 3x+4y = 22 \end{cases}$$

**Ten en cuenta**  
Una vez simplificado el sistema, razona cuál de los métodos es más conveniente utilizar.

Al tener dos coeficientes opuestos, resolvemos por el método de reducción sumando las ecuaciones.

$$\left. \begin{cases} -3x+2y = 2 \\ 3x+4y = 22 \end{cases} \right\} \rightarrow 6y = 24 \rightarrow y = 4 \quad -3x + 2 \cdot 4 = 2 \rightarrow -3x = -6 \rightarrow x = 2$$

Por tanto, la solución es:  $x = 2, y = 4$

8. En una granja hay cerdos y gallinas; en total 40 cabezas y 108 patas. ¿Cuántos cerdos y gallinas son?

Sean  $x$  el número de gallinas e  $y$  el número de cerdos. El sistema que planteamos es:  $\begin{cases} x + y = 40 \\ 2x + 4y = 108 \end{cases}$

Resolviéndolo por cualquier método, la solución es:  $x = 26, y = 14$

Por tanto, hay 14 cerdos y 26 gallinas.

9. Halla dos números sabiendo que su diferencia es 12 y que, si aumentamos 14 unidades al mayor, obtenemos el triple del menor.

Sean  $x$  el número mayor e  $y$  el número menor. El sistema que planteamos es:  $\begin{cases} x - y = 12 \\ x + 14 = 3y \end{cases}$

Resolviéndolo por cualquier método, la solución es:  $x = 25, y = 13$

Por tanto, los números son 25 y 13.

10. Las dos cifras de un número suman 10. Si invertimos el orden de las cifras el número resultante es 36 unidades mayor. Halla el número.

Sean  $x$  la cifra de las unidades e  $y$  la de las decenas. El número pedido es de la forma  $yx$ . Si invertimos el orden de las cifras tendríamos el número  $xy$ , que es igual a  $10x + y$ .

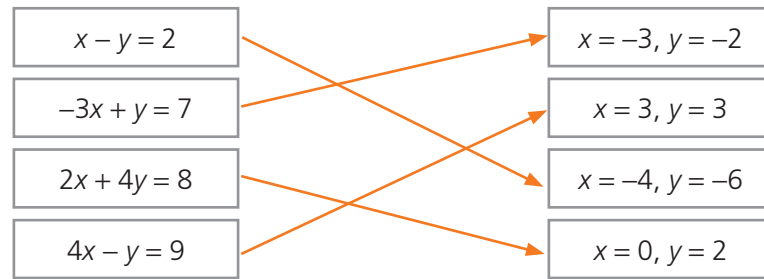
**Ten en cuenta**  
Si escribimos un número  $ab$  en función de sus cifras:  $ab = 10a + b$

$$\text{Por lo tanto, el sistema que obtenemos es: } \left. \begin{cases} x + y = 10 \\ 10x + y = 10y + x + 36 \end{cases} \right\} \rightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ 9x - 9y = 36 \end{cases}$$

Resolviéndolo por cualquier método, la solución es:  $x = 7, y = 3$ . Por tanto, el número pedido es el 37.

# Evaluación C

1. Relaciona cada ecuación lineal con su solución correspondiente.



2. Completa las tablas de modo que cada par de números  $(x, y)$  sea una solución de la ecuación lineal que se indica. ¿Cuál es la solución del sistema formado por ambas?

a)  $2x - y = 10$

x	1	2	3	4
y	-8	-6	-4	-2

b)  $x - y = 6$

x	1	2	3	4
y	-5	-4	-3	-2

La solución del sistema es  $x = 4, y = -2$ .

3. Resuelve este sistema mediante el método de sustitución: 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x + 2y = -2 \end{cases}$$

Despejamos  $x$  en la primera ecuación:  $x = \frac{8 - 3y}{2}$

Sustituimos la expresión en la segunda ecuación, y resolvemos.

$$5 \cdot \left( \frac{8 - 3y}{2} \right) + 2y = -2 \rightarrow \frac{40 - 15y}{2} + 2y = -2 \rightarrow 40 - 15y + 4y = -4 \rightarrow -11y = -44 \rightarrow y = 4$$

Sustituimos el valor de  $y$  hallado en la expresión que hemos despejado en el primer paso para hallar  $x$ .

$$x = \frac{8 - 3 \cdot 4}{2} = \frac{8 - 12}{2} = -\frac{4}{2} = -2. \text{ Por tanto, la solución es: } x = -2, y = 4$$

4. Resuelve el siguiente sistema mediante el método de igualación: 
$$\begin{cases} -7x + 3y = -9 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases}$$

Despejamos  $y$  en las dos ecuaciones:  $y = \frac{-9 + 7x}{3}, y = \frac{23 - 5x}{2}$

$$\text{Igualamos y resolvemos: } \frac{-9 + 7x}{3} = \frac{23 - 5x}{2} \rightarrow -18 + 14x = 69 - 15x \rightarrow 29x = 87 \rightarrow x = 3$$

$$\text{Sustituimos el valor hallado en cualquiera de las expresiones iniciales: } y = \frac{-9 + 7 \cdot 3}{3} = \frac{-9 + 21}{3} = 4$$

Por tanto, la solución es:  $x = 3, y = 4$

5. Resuelve el siguiente sistema mediante el método de reducción: 
$$\begin{cases} 6x - y = 3 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$$

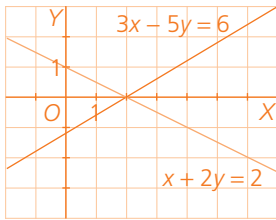
Multiplicamos la primera ecuación por 3 para igualar coeficientes:  $6x - y = 3 \xrightarrow{\cdot 3} 18x - 3y = 9$

$$\text{Sumamos las ecuaciones y resolvemos para hallar } x: \begin{cases} 18x - 3y = 9 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases} \rightarrow 22x = 22 \rightarrow x = 1$$

Sustituimos el valor obtenido en una de las ecuaciones iniciales:  $6 \cdot 1 - y = 3 \rightarrow y = 6 - 3 = 3$

Por tanto, la solución es:  $x = 1, y = 3$

6. Resuelve el sistema  $\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$  mediante el método gráfico.



Se observa en el dibujo que la solución es:  $x = 2, y = 0$

7. Simplifica el sistema  $\begin{cases} \frac{x-2}{4} - \frac{3(y-1)}{4} = -4 \\ 3(x-3) = 5y-4 \end{cases}$  y resuélvelo por el método más conveniente.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x-2}{4} - \frac{3(y-1)}{4} = -4 \\ 3(x-3) = 5y-4 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{x-2}{4} - \frac{3y-3}{4} = \frac{-16}{4} \\ 3x-9 = 5y-4 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x-2-3y+3 = -16 \\ 3x-9 = 5y-4 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x-3y = -17 \\ 3x-5y = 5 \end{array} \right\}$$

En la primera ecuación es fácil despejar  $x$ , por lo que resolvemos el sistema por el método de sustitución.

Despejamos  $x$  en la primera ecuación:  $x = 3y - 17$

Sustituimos en la segunda ecuación y resolvemos:  $3(3y - 17) - 5y = 5 \rightarrow 9y - 51 - 5y = 5 \rightarrow y = 14$

Sustituimos el valor hallado de  $y$  en la expresión del primer paso para hallar  $x$ .

$$x = 3 \cdot 14 - 17 = 25$$

Por tanto, la solución es:  $x = 25, y = 14$

8. En un hotel hay 100 habitaciones entre dobles y triples. Si en total hay 225 camas, ¿cuántas habitaciones hay de cada tipo?

Sean  $x$  el número de habitaciones dobles e  $y$  el de habitaciones triples. El sistema es:  $\begin{cases} x + y = 100 \\ 2x + 3y = 225 \end{cases}$

Resolviéndolo por cualquier método, la solución es:  $x = 75, y = 25$

Por tanto, el hotel tiene 75 habitaciones dobles y 25 habitaciones triples.

9. Se han pagado 29 € por 6 bocadillos y 4 refrescos, y 20 € por 4 bocadillos y 3 refrescos. ¿Cuál es el precio del bocadillo y del refresco, si cada bocadillo tiene el mismo precio y cada refresco cuesta lo mismo?

Sean  $x$  el precio del bocadillo e  $y$  el del refresco. El sistema que obtenemos es:  $\begin{cases} 6x + 4y = 29 \\ 4x + 3y = 20 \end{cases}$

Resolviéndolo por cualquier método, la solución es:  $x = 3,5; y = 2$

Por tanto, cada bocadillo cuesta 3,50 €, y cada refresco, 2 €.

10. Dentro de tres años la suma de las edades de un padre y su hija será 52 años. Hace 4 años la edad del padre era 18 veces más que la de su hija. ¿Qué edad tiene cada uno?

Sean  $x$  la edad del padre e  $y$  la de la hija.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3 + y + 3 = 52 \\ x - 4 = 18(y - 4) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 46 \\ x - 18y = -68 \end{array} \right\}$$

	Hace 4 años	Hoy	Dentro de 3 años
Edad del padre	$x - 4$	$x$	$x + 3$
Edad de la hija	$y - 4$	$y$	$y + 3$

Resolviéndolo por cualquier método, la solución es:  $x = 40, y = 6$

Por tanto, el padre tiene 40 años y su hija 6 años.

# Evaluación D

1. Halla el valor de  $a$  y  $b$  en el siguiente sistema de ecuaciones para que el par de números  $x = 1, y = 2$  sea solución de este sistema:

$$\begin{cases} 3x + ay = 5 \\ -bx + 2y = 3 \end{cases}$$

Sustituimos los valores  $x = -1, y = 2$  en la ecuación y resolvemos las dos ecuaciones de primer grado con

incógnitas  $a$  y  $b$ : 
$$\begin{cases} 3 \cdot (-1) + a \cdot 2 = 5 \rightarrow -3 + 2a = 5 \rightarrow 2a = 8 \rightarrow a = 4 \\ -b \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 3 \rightarrow b + 4 = 3 \rightarrow b = -1 \end{cases}$$

2. Completa las tablas de modo que cada par de números  $(x, y)$  sea una solución de la ecuación lineal que se indica. ¿Cuál es la solución del sistema formado por ambas?

a)  $4x - y = -1$

$x$	1	2	3	4
$y$	5	9	13	17

b)  $x + 2y = 11$

$x$	1	2	3	4
$y$	5	$\frac{9}{2}$	4	$\frac{7}{2}$

La solución del sistema es  $x = 1, y = 5$ .

3. Resuelve el siguiente sistema mediante el método de sustitución: 
$$\begin{cases} 2x + 2y = -3 \\ 6x + 7y = -10 \end{cases}$$

Despejamos  $x$  en la primera ecuación:  $x = \frac{-3 - 2y}{2}$

Sustituimos en la segunda ecuación y resolvemos:

$$6\left(\frac{-3 - 2y}{2}\right) + 7y = -10 \rightarrow \frac{-18 - 12y}{2} + 7y = -10 \rightarrow -9 - 6y + 7y = -10 \rightarrow y = -1$$

Sustituimos el valor hallado en la expresión que hemos despejado en el primer paso para hallar  $x$ .

$$x = \frac{-3 - 2 \cdot (-1)}{2} = \frac{-3 + 2}{2} = -\frac{1}{2}. \text{ Por tanto, la solución es: } x = -\frac{1}{2}, y = -1$$

4. Resuelve el siguiente sistema mediante el método de igualación: 
$$\begin{cases} 3x - y = 10 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$$

Despejamos  $y$  en las dos ecuaciones:  $y = 3x - 10, y = 11 - 4x$

Igualamos las expresiones obtenidas y resolvemos para hallar  $x$ :  $3x - 10 = 11 - 4x \rightarrow 7x = 21 \rightarrow x = 3$

Sustituimos el valor hallado en cualquiera de las expresiones iniciales:  $y = 3 \cdot 3 - 10 = -1$

Por tanto, la solución es:  $x = 3, y = -1$

5. Resuelve el siguiente sistema mediante el método de reducción: 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ 7x - y = 55 \end{cases}$$

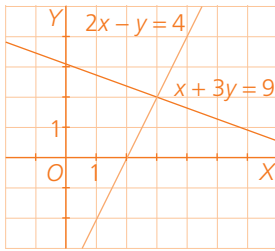
Multiplicamos la segunda ecuación por 3 para igualar coeficientes:  $7x - y = 55 \xrightarrow{\cdot 3} 21x - 3y = 165$

Sumamos las ecuaciones y resolvemos para hallar  $x$ : 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ 21x - 3y = 165 \end{cases} \rightarrow 23x = 184 \rightarrow x = 8$$

Sustituimos el valor obtenido en una de las ecuaciones iniciales y hallamos el valor de  $y$ .

$2 \cdot 8 + 3y = 19 \rightarrow 16 + 3y = 19 \rightarrow 3y = 3 \rightarrow y = 1$ . Por tanto, la solución es:  $x = 8, y = 1$

6. Resuelve el siguiente sistema mediante el método gráfico: 
$$\begin{cases} x + 3y = 9 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$



Se observa en el dibujo que la solución es:  $x = 3, y = 2$

7. Simplifica el siguiente sistema y resuélvelo por el método que consideres más conveniente.

$$\begin{cases} -3(y - 2) = 2(x - y) - 3(x + y) \\ 5(y - 1) - 2(-3 - 2x) = 3y + 2x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3(y - 2) = 2(x - y) - 3(x + y) \\ 5(y - 1) - 2(-3 - 2x) = 3y + 2x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3y + 6 = 2x - 2y - 3x - 3y \\ 5y - 5 + 6 + 4x = 3y + 2x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = -6 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Como los coeficientes de la  $y$  son iguales, resolvemos por el método de reducción restando las ecuaciones.

$$\begin{cases} x + 2y = -6 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow -x = -6 \rightarrow x = 6$$

$$6 + 2y = -6 \rightarrow 2y = -12 \rightarrow y = -6$$

Por tanto, la solución es:  $x = 6, y = -6$

8. Se mezcla café de 12 €/kg con café de 7 €/kg para obtener una mezcla de 40 kg a 9 €/kg. ¿Cuánto café se ha mezclado de cada clase?

Sean  $x$  los kilos de café de 12 €/kg e  $y$  los kilos de café de 7 €/kg.

Con la ayuda de la tabla el sistema que obtenemos es: 
$$\begin{cases} x + y = 40 \\ 12x + 7y = 360 \end{cases}$$

Resolviéndolo por cualquier método, la solución es:  $x = 16, y = 24$

Por tanto, habrá que mezclar 16 kg de café de 12 €/kg con 24 kg de café de 7 €/kg.

	kg	€/kg	Precio
Café 12 €/kg	$x$	12	$12x$
Café 7 €/kg	$y$	7	$7y$
Mezcla	40	9	360

9. En una tienda, 4 raquetas y 3 balones cuestan 160 €. Si nos descuentan un 20 % en el precio de las raquetas y un 50 % en el precio de los balones, pagamos 110 €. ¿Cuál es el precio de una raqueta y un balón?

Sean  $x$  el precio de raqueta e  $y$  el del balón. Teniendo en cuenta que si nos hacen un descuento del 20 % estamos pagando un 80 %, y si nos descuentan un 50 % pagamos un 50 %, el sistema es:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 160 \\ 0,8 \cdot 4x + 0,5 \cdot 3y = 110 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 160 \\ 3,2x + 1,5y = 110 \end{cases}$$

Podemos multiplicar por 10 la segunda ecuación para eliminar los decimales: 
$$\begin{cases} 4x + 3y = 160 \\ 32x + 15y = 1100 \end{cases}$$
 Resolviéndolo por cualquier método la solución es:  $x = 25, y = 20$

Por tanto, cada raqueta cuesta 25 € y cada balón 20 €.

10. Halla dos números tales que el triple del primero más el doble del segundo suman 55, y la diferencia entre los dos es de 5 unidades.

Sean  $x$  el primer número e  $y$  el segundo. El sistema que obtenemos es: 
$$\begin{cases} 3x + 2y = 55 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

Resolviéndolo por cualquier método, la solución es  $x = 13, y = 8$ . Por tanto, los números pedidos son 13 y 8.

# SUCESIONES

## Evaluación A

1. Escribe los cinco siguientes términos de estas sucesiones.

a) 3, 6, 12, 24,  $\boxed{48}$ ,  $\boxed{96}$ ,  $\boxed{192}$ ,  $\boxed{384}$ ,  $\boxed{768}$

c)  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \boxed{\frac{5}{6}}, \boxed{\frac{6}{7}}, \boxed{\frac{7}{8}}, \boxed{\frac{8}{9}}, \boxed{\frac{9}{10}}$

b) 2, 3, 5, 8,  $\boxed{13}$ ,  $\boxed{21}$ ,  $\boxed{34}$ ,  $\boxed{55}$ ,  $\boxed{89}$

d) 7, 3, -1, -5, -9,  $\boxed{-13}$ ,  $\boxed{-17}$ ,  $\boxed{-21}$ ,  $\boxed{-25}$ ,  $\boxed{-29}$

2. Encuentra el término general de estas sucesiones.

a) 1, 4, 9, 16, 25, ...      b)  $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots$       c) 5, 10, 15, 20, 25, ...      d) 1, 3, 9, 27, 81, ...

a) Los términos de esta sucesión son los cuadrados de los números naturales. Entonces,  $a_n = n^2$ .

b) El numerador es el número del término más 2, y el denominador, más 1. Luego,  $b_n = \frac{n+2}{n+1}$ .

c) Los términos de esta sucesión son los múltiplos de 5. Entonces,  $c_n = 5n$ .

d) Los términos de esta sucesión son las potencias de 3 empezando con exponente 0. Luego,  $d_n = 3^{n-1}$ .

3. Clasifica las siguientes progresiones en aritméticas o geométricas, e indica la diferencia o la razón en cada caso.

a) 7, 11, 15, 19, 23, ...      c)  $\frac{2}{5}, \frac{11}{15}, \frac{16}{15}, \frac{7}{5}, \dots$

b) -4, 8, -16, 32, -64, ...      d) 32, 16, 8, 4, 2, ...

a) Progresión aritmética de diferencia  $d = 4$ .

b) Progresión geométrica de razón  $r = -2$ .

c) Progresión aritmética de diferencia  $d = \frac{1}{3}$ .

d) Progresión geométrica de razón  $r = \frac{1}{2}$ .

### Recuerda

■ Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que cada término, excepto el primero, se obtiene sumándole al anterior un mismo número llamado **diferencia,  $d$** .

■ Una **progresión geométrica** es una sucesión cuyos términos, excepto el primero, se obtienen multiplicando el anterior por un mismo número llamado **razón,  $r$** .

4. Calcula el término general de una progresión aritmética que tiene por diferencia  $d = 3$  y cuyo primer término vale 10. Halla  $a_{12}$  y  $a_{15}$ .

Hallamos el término general.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 10 + (n-1) \cdot 3 = 10 + 3n - 3 = 3n + 7 \rightarrow a_n = 3n + 7$$

A partir del término general, calculamos los términos  $a_{12}$  y  $a_{15}$ .

$$a_{12} = 3 \cdot 12 + 7 = 36 + 7 = 43 \qquad a_{15} = 3 \cdot 15 + 7 = 45 + 7 = 52$$

### Recuerda

El término general de las progresiones aritméticas es:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

5. Halla el término  $a_8$  de una progresión aritmética si su tercer término vale 5, y el quinto, 13.

Sabemos que  $a_3 = 5$  y  $a_5 = 13$ . Sustituimos estos datos en la fórmula del término general para hallar el primer término y la diferencia.

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= a_1 + (3-1) \cdot d \rightarrow a_1 + 2d = 5 \\ a_5 &= a_1 + (5-1) \cdot d \rightarrow a_1 + 4d = 13 \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos  $a_1 = -3$  y  $d = 4$ .

Por lo tanto, el término general tiene por ecuación  $a_n = -3 + (n-1) \cdot 4$ .

Para calcular el término  $a_8$  sustituimos en la expresión del término general.

$$a_8 = -3 + (8-1) \cdot 4 = -3 + 7 \cdot 4 = -3 + 28 = 25$$

6. En una progresión aritmética el primer término es 5 y la diferencia  $-4$ . Halla el valor de  $n$  sabiendo que  $a_n = -115$ .

En primer lugar hallamos el término general.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow a_n = 5 + (n - 1) \cdot (-4) \rightarrow a_n = 5 - 4n + 4 \rightarrow a_n = -4n + 9$$

Sustituimos el dato que nos dan.

$$-115 = -4n + 9 \rightarrow -115 - 9 = -4n \rightarrow -124 = -4n \rightarrow n = \frac{-124}{-4} = 31$$

7. Calcula el término general de una progresión geométrica de razón  $r = 5$  cuyo primer término vale 2. Halla  $a_7$  y  $a_{10}$ .

Hallamos el término general.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$$

A partir del término general, calculamos los términos  $a_7$  y  $a_{10}$ .

$$a_7 = 2 \cdot 5^{7-1} = 2 \cdot 5^6 = 31\,250 \qquad a_{10} = 2 \cdot 5^{10-1} = 2 \cdot 5^9 = 3\,906\,250$$

**Recuerda**

El término general de las progresiones geométricas es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

8. Halla la razón y el término general de una progresión geométrica si su segundo término es  $\frac{3}{2}$  y el cuarto vale  $\frac{27}{2}$ .

Sustituimos  $a_2 = \frac{3}{2}$  y  $a_4 = \frac{27}{2}$  en la expresión del término general para hallar  $a_1$  y la razón,  $r$ .

$$a_2 = a_1 \cdot r^{2-1} = \frac{3}{2} \rightarrow a_1 \cdot r = \frac{3}{2} \qquad a_4 = a_1 \cdot r^{4-1} = \frac{27}{2} \rightarrow a_1 \cdot r^3 = \frac{27}{2}$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera obtenemos  $r^2 = 9$ . Entonces,  $r = 3$ .

Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos  $a_1 = \frac{1}{2}$ .

Por lo tanto el término general es:  $a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1}$

9. Determina, si es posible, la razón de una progresión geométrica sabiendo que  $a_1 = 1$  y  $a_3 = -27$ .

El término general de una progresión geométrica es  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ .

Sustituimos los datos que tenemos:  $a_3 = 1 \cdot r^2 \rightarrow -27 = r^2$

La ecuación  $r^2 = -27$  no tiene solución. Por tanto, no es posible hallar la razón.

10. Los primeros términos de una sucesión son  $a_1 = 11$ ,  $a_2 = 16$ ,  $a_3 = 21$ . Halla el término general. ¿Hay algún término cuyo valor sea 83? ¿Y 2001?

Como  $a_1 = 11$ ,  $a_2 = 16$  y  $a_3 = 21$ , la diferencia es  $d = 5$ .

El término general es  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 11 + (n - 1) \cdot 5 = 5n + 6$ .

Ningún término valdrá 83 ya que si sustituimos en la expresión del término general la ecuación resultante es  $5n + 6 = 83$  que no tiene solución natural.

El valor del término  $a_{399}$  es 2001 ya que si sustituimos en la expresión del término general, la ecuación resultante  $5n + 6 = 83$  tiene como solución natural  $n = 399$ .

# Evaluación B

1. Completa las siguientes sucesiones con los términos que faltan.

a) 3,  $\boxed{6}$ , 12, 24,  $\boxed{48}$ , 96, ...

c)  $\frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \frac{\boxed{3}}{9}, \frac{4}{11}, \frac{\boxed{5}}{13}, \frac{6}{15}, \dots$

b)  $-16, 4, -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \frac{\boxed{1}}{64}, -\frac{1}{256}, \dots$

d) 0, 3, 8,  $\boxed{15}$ ,  $\boxed{24}$ , 35, ...

2. Escribe los cuatro primeros términos de estas sucesiones.

a)  $a_n = (n - 1)^2$

b)  $a_n = 3n - 2$

c)  $a_n = \frac{n-1}{n+2}$

d)  $a_n = n^3 - 1$

a)  $a_1 = (1 - 1)^2 = 0, a_2 = (2 - 1)^2 = 1, a_3 = (3 - 1)^2 = 4, a_4 = (4 - 1)^2 = 9$

b)  $a_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1, a_2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4, a_3 = 3 \cdot 3 - 2 = 7, a_4 = 3 \cdot 4 - 2 = 10$

c)  $a_1 = \frac{1-1}{1+2} = 0, a_2 = \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}, a_4 = \frac{4-1}{4+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

d)  $a_1 = 1^3 - 1 = 0, a_2 = 2^3 - 1 = 7, a_3 = 3^3 - 1 = 26, a_4 = 4^3 - 1 = 63$

3. Halla los cinco primeros términos de estas sucesiones recurrentes.

a)  $a_1 = 5, a_n = a_{n-1} + 2$

c)  $a_1 = -2, a_n = a_{n-1}^2$

b)  $a_1 = 5, a_2 = 2, a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

d)  $a_1 = 3, a_2 = 2, a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2}$

a)  $a_1 = 5, a_2 = a_1 + 2 = 5 + 2 = 7, a_3 = a_2 + 2 = 7 + 2 = 9,$   
 $a_4 = a_3 + 2 = 9 + 2 = 11, a_5 = a_4 + 2 = 11 + 2 = 13$

b)  $a_1 = 5, a_2 = 2, a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3, a_4 = a_3 - a_2 = -3 - 2 = -5, a_5 = a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -2$

c)  $a_1 = -2, a_2 = a_1^2 = (-2)^2 = 4, a_3 = a_2^2 = 4^2 = 16, a_4 = a_3^2 = 16^2 = 256, a_5 = a_4^2 = 256^2 = 65536$

d)  $a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 3a_2 + a_1 = 3 \cdot 2 + 3 = 9, a_4 = 3a_3 + a_2 = 3 \cdot 9 + 2 = 29, a_5 = 3a_4 + a_3 = 3 \cdot 29 + 9 = 96$

## Recuerda

Una sucesión recurrente es aquella en la que cada término se define a partir de los anteriores.

4. Encuentra el término general de las siguientes progresiones aritméticas. Halla  $a_{13}$  y  $a_{25}$ .

a)  $-5, -3, -1, 1, 3, \dots$

b)  $3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}, \dots$

a)  $a_1 = -5, d = 2 \rightarrow a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = -5 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 7 \rightarrow a_n = 2n - 7$

Sustituyendo en la expresión anterior:  $a_{13} = 2 \cdot 13 - 7 = 19, a_{25} = 2 \cdot 25 - 7 = 43$

b)  $a_1 = 3, d = \frac{1}{2} \rightarrow a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 3 + (n - 1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2} + \frac{5}{2} \rightarrow a_n = \frac{n}{2} + \frac{5}{2}$

Sustituyendo en la expresión anterior:  $a_{13} = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9, a_{25} = \frac{25}{2} + \frac{5}{2} = 15$

5. En una progresión aritmética conocemos los términos  $a_5 = 31$  y  $a_{12} = 59$ . Halla en qué posición está el término cuyo valor es 135.

Calculamos la diferencia:  $d = \frac{a_{12} - a_5}{12 - 5} = \frac{59 - 31}{7} = \frac{28}{7} = 4$

Hallamos  $a_1$  sustituyendo en la fórmula del término general el valor de  $a_5$ .

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow a_5 = a_1 + (5 - 1) \cdot 4 \rightarrow 31 = a_1 + 16 \rightarrow a_1 = 15$

Por tanto, el término general es:  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 15 + (n - 1) \cdot 4 = 4n + 11$

Calculamos la posición del término cuyo valor es 135:  $4n + 11 = 135 \rightarrow 4n = 124 \rightarrow n = 31$

Luego  $a_{31} = 135$ .

## Ten en cuenta

Si  $a_m$  y  $a_n$  son términos de una progresión aritmética, entonces:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$



6. Interpola tres términos aritméticos entre los números 17 y 69.

Tenemos que hallar los términos  $a_2$ ,  $a_3$  y  $a_4$  de la progresión aritmética. Calculamos la diferencia de la progresión.

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{a_5 - a_1}{5 - 1} = \frac{69 - 17}{5 - 1} = \frac{52}{4} = 13$$

Entonces:  $a_2 = 17 + 13 = 30$ ,  $a_3 = 30 + 13 = 43$ ,  $a_4 = 43 + 13 = 56$

**Ten en cuenta**

Interpolar aritméticamente tres términos entre los números 17 y 69 equivale a hallar los términos  $a_2$ ,  $a_3$  y  $a_4$  de una progresión aritmética sabiendo que  $a_1 = 17$  y  $a_5 = 69$ .

7. Los tres lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética de diferencia 5 cm. Halla la medida de cada uno de los lados.

Como los lados están en progresión aritmética de diferencia 5, los llamamos  $x$ ,  $x + 5$  y  $x + 10$ , siendo este último la hipotenusa por ser el mayor. Aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$(x + 10)^2 = (x + 5)^2 + x^2 \rightarrow x^2 + 20x + 100 = x^2 + 10x + 25 + x^2 \rightarrow x^2 - 10x - 75 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-75)}}{2} = \frac{10 \pm 20}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 15 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

Por lo tanto, el primer lado mide 15 cm, y los otros dos, 20 cm y 25 cm.

8. Calcula el término general de las siguientes progresiones geométricas. Halla  $a_8$  y  $a_{11}$ .

a) 81, 27, 8, 3, 1, ...

b) -3, 6, -12, 24, -48, ...

La fórmula del término general de una progresión geométrica es  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ .

a)  $a_1 = 81$ ,  $r = \frac{1}{3}$ ,  $a_n = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$a_8 = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{8-1} = 3^4 \cdot \frac{1}{3^7} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}, \quad a_{11} = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{11-1} = 3^4 \cdot \frac{1}{3^{10}} = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$$

b)  $a_1 = -3$ ,  $r = -2$ ,  $a_n = (-3) \cdot (-2)^{n-1}$

$$a_8 = (-3) \cdot (-2)^{8-1} = (-3) \cdot (-2)^7 = 384, \quad a_{11} = (-3) \cdot (-2)^{11-1} = (-3) \cdot (-2)^{10} = -3072$$

9. Averigua la razón de una progresión geométrica cuyo primer término es 343 y el cuarto 27. Halla el término general.

Sustituimos los valores  $a_1 = 343$  y  $a_4 = 27$  en la expresión del término general para obtener la razón.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_4 = a_1 \cdot r^{4-1} \rightarrow 27 = 343 \cdot r^3 \rightarrow r^3 = \frac{27}{343} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{27}{343}} = \frac{3}{7}$$

El término general es:  $a_n = a_1 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1}$

10. Una balsa pierde cada día un cuarto del agua que contiene. Si al principio tenía 8960 L, ¿cuántos litros quedarán el quinto día?

Si cada día pierde un cuarto, conserva tres cuartos del agua que contiene.

Luego la cantidad de agua que conserva cada día es una progresión geométrica de primer término 8960 y razón  $\frac{3}{4}$ .

El término general es:  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 8960 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

El quinto día quedarán  $a_5 = 8960 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{5-1} = 2835$  L.

# Evaluación C

1. Escribe los cuatro siguientes términos de estas sucesiones.

a)  $-1, 3, -9, 27, -81, \boxed{243}, \boxed{-729}, \boxed{2187}, \boxed{-6561}$

c)  $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \boxed{\frac{25}{6}}, \boxed{\frac{36}{7}}, \boxed{\frac{49}{8}}, \boxed{\frac{64}{9}}$

b)  $1, 8, 27, 64, \boxed{125}, \boxed{216}, \boxed{343}, \boxed{512}$

d)  $\frac{2}{5}, \frac{11}{15}, \frac{16}{15}, \frac{7}{5}, \boxed{\frac{26}{15}}, \boxed{\frac{31}{15}}, \boxed{\frac{12}{5}}, \boxed{\frac{41}{15}}$

2. Relaciona cada sucesión con su término general.

$$\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \dots$$

$$1, 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{16}, \dots$$

$$\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \dots$$

$$1, 1, \frac{4}{3}, 2, \frac{16}{5}, \dots$$

$$\frac{n^2}{2^n}$$

$$\frac{2^n}{2n}$$

$$\frac{n}{2^{n-1}}$$

$$\frac{n^2}{n+1}$$

3. Indica si los siguientes números pertenecen a la sucesión  $a_n = n^2 - 2n + 3$  y, en caso afirmativo, determina la posición que ocupan.

a) 18

b) 75

c) 2

d) 83

Igualamos la expresión del término general con cada uno de los valores dados y resolvemos la ecuación de segundo grado resultante.

a)  $n^2 - 2n + 3 = 18 \rightarrow n^2 - 2n - 15 = 0 \rightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 5 \\ n_2 = -3 \end{cases}$

Tomando la solución positiva, tenemos que 18 es el quinto término de la sucesión.

b)  $n^2 - 2n + 3 = 75 \rightarrow n^2 - 2n - 72 = 0 \rightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 288}}{2} = \frac{2 \pm 17,09}{2} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 9,544 \\ n_2 = -7,544 \end{cases}$

Como  $n$  no es un valor natural, 75 no pertenece a la sucesión.

c)  $n^2 - 2n + 3 = 2 \rightarrow n^2 - 2n + 1 = 0 \rightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow$  El primer término de la sucesión es 2.

d)  $n^2 - 2n + 3 = 83 \rightarrow n^2 - 2n - 80 = 0 \rightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 320}}{2} = \frac{2 \pm 18}{2} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 10 \\ n_2 = -8 \end{cases}$

Tomando la solución positiva, tenemos que 83 es el décimo término de la sucesión.

4. El primer término de una progresión aritmética es 80, y la diferencia,  $-7$ . ¿Qué lugar ocupar el primer número negativo?

Tenemos que determinar cuál es el primer valor de  $n$  que cumpla que  $a_n < 0$ .

Calculamos el término general:  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 80 + (n - 1) \cdot (-7) = -7n + 87 \rightarrow a_n = -7n + 87 - 7n + 87 < 0 \rightarrow 7n > 87 \rightarrow n > 12,43$

Por tanto, el primer número negativo ocupa el lugar 13.

5. Halla el término  $a_{80}$  de una progresión aritmética sabiendo que  $a_5 = 20$  y  $a_{10} = 5$ .

Hallamos el término general:  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow \begin{cases} a_5 = a_1 + (5 - 1) \cdot d \rightarrow 20 = a_1 + 4d \\ a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot d \rightarrow 5 = a_1 + 9d \end{cases}$

Resolviendo el sistema tenemos que  $a_1 = 32$  y  $d = -3$ .

Por tanto, el término general es:  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 32 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 35$

Luego:  $a_{80} = -3 \cdot 80 + 35 = -205$

6. Calcula el primer término y el término general de una progresión aritmética que tiene por diferencia  $d = 7$  y cuyo décimo término vale 39.

Hallamos el primer término sustituyendo los datos que nos dan en la expresión del término general.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot 7 \rightarrow 39 = a_1 + 63 \rightarrow a_1 = 39 - 63 = -24$$

Por lo tanto el término general es:  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow a_n = -24 + (n - 1) \cdot 7 = -24 + 7n - 7 = 7n - 31$

7. Halla el término general y el término  $a_8$  de las siguientes progresiones.

a) 200, 100, 50, 25,...

b) 10; 1; 0,1; 0,01;...

a) Es una progresión geométrica cuyo primer término es 200 y su razón  $\frac{1}{2}$ .

$$\text{Por tanto: } a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ y } a_8 = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8-1} = 1,5625$$

b) Es una progresión geométrica cuyo primer término es 10 y su razón 0,1.

$$\text{Entonces: } a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 10 \cdot 0,1^{n-1} \text{ y } a_8 = 10 \cdot 0,1^{8-1} = 10 \cdot 0,1^7 = 10 \cdot \frac{1}{10^7} = 10^{-6}$$

8. Halla el término general y el término  $a_8$  de una progresión geométrica sabiendo que  $a_5 = \frac{1}{6}$  y la razón es  $\frac{2}{3}$ .

En primer lugar hallamos el primer término de la progresión mediante la expresión del término general.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_5 = a_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{5-1} \rightarrow \frac{1}{6} = a_1 \cdot \frac{16}{81} \rightarrow a_1 = \frac{27}{32}$$

Por tanto, el término general viene dado por esta expresión:  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = \frac{27}{32} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$\text{El término } a_8 \text{ es: } a_8 = \frac{27}{32} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{8-1} = \frac{4}{81}$$

9. Averigua la razón de una progresión geométrica cuyo primer término es 243 y el cuarto 72. Halla el término general y el término  $a_{10}$ .

Sabemos que  $a_1 = 243$  y  $a_4 = 72$ .

Sustituyendo el término  $a_4$  en la expresión del término general tenemos:

$$a_4 = a_1 \cdot r^{4-1} \rightarrow 72 = 243 \cdot r^3 \rightarrow r^3 = \frac{72}{243} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{72}{243}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$$

Por tanto, el término general es  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 243 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$  y el término  $a_{10} = 243 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10-1} = \frac{512}{81}$ .

10. Un coche cuesta 20000 € y cada año su precio se rebaja un 10%. ¿Cuál será su precio al cabo de 5 años?

Si cada año su precio desciende un 10%, el segundo año pagaríamos un 90%, lo que supone multiplicar el precio por 0,9. Por tanto, se trata de una progresión geométrica de primer término 20000 y razón 0,9. El término general es  $a_n = 20000 \cdot 0,9^{n-1}$ . Entonces:  $a_5 = 20000 \cdot 0,9^4 = 13122$

Al cabo de 5 años su precio será de 13122 €.

## Evaluación D

1. Escribe el tercer, el quinto y el décimo término de las siguientes sucesiones.

a)  $a_n = (n-2)(n+1)$       b)  $a_n = (-1)^n$       c)  $a_n = \frac{n+1}{n^2}$       d)  $a_n = \frac{n-1}{n}$

a)  $a_3 = (3-2)(3+1) = 4$ ,  $a_5 = (5-2)(5+1) = 18$ ,  $a_{10} = (10-2)(10+1) = 88$

b)  $a_3 = (-1)^3 = -1$ ,  $a_5 = (-1)^5 = -1$ ,  $a_{10} = (-1)^{10} = 1$

c)  $a_3 = \frac{3+1}{3^2} = \frac{4}{9}$ ,  $a_5 = \frac{5+1}{5^2} = \frac{6}{25}$ ,  $a_{10} = \frac{10+1}{10^2} = \frac{11}{100}$

d)  $a_3 = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$ ,  $a_5 = \frac{5-1}{5} = \frac{4}{5}$ ,  $a_{10} = \frac{10-1}{10} = \frac{9}{10}$

2. En una sucesión, cada término cumple que es el triple del término anterior más 2 unidades.

a) Escribe la ley de recurrencia de la sucesión.

b) Halla los 6 primeros términos de ella sabiendo que el primero es 1.

a) La ley de recurrencia es:  $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 2$

b)  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$ ,  $a_3 = 3 \cdot 5 + 2 = 17$ ,  $a_4 = 3 \cdot 17 + 2 = 53$ ,  $a_5 = 3 \cdot 53 + 2 = 161$ ,  $a_6 = 3 \cdot 161 + 2 = 485$

3. Calcula el término general de la progresión aritmética que tiene por diferencia  $d = -5$  y cuyo tercer término vale  $-6$ . Halla  $a_{20}$ .

Calculamos  $a_1$  mediante la expresión del término general y los datos que nos dan.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_3 = a_1 + (3-1) \cdot (-5) \rightarrow -6 = a_1 - 10 \rightarrow a_1 = 4$$

Por lo tanto, el término general es:  $a_n = 4 + (n-1) \cdot (-5) \rightarrow a_n = -5n + 9$  y  $a_{20} = -5 \cdot 20 + 9 = -91$

4. Halla el término general y los términos que ocupan las posiciones 19 y 40 de una progresión aritmética cuya diferencia es 7 si su primer término es 15.

$$\text{El término general es: } a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_n = 15 + (n-1) \cdot 7 \rightarrow a_n = 15 + 7n - 7 \rightarrow a_n = 7n + 8$$

Entonces:  $a_{19} = 7 \cdot 19 + 8 = 141$  y  $a_{40} = 7 \cdot 40 + 8 = 288$

5. Alfonso y Conchi han guardado 100 € en un cajón y cada mes añaden 75 € más.

a) Escribe el término general que indica el dinero que tienen en el mes  $n$ .

b) ¿Cuánto dinero tendrán al cabo de 2 años y medio?

c) Si su objetivo es conseguir 850 € para hacer un viaje, ¿cuántos meses tardarán en reunirlo?

a) Se trata de una progresión aritmética que tiene por diferencia  $d = 75$  y cuyo primer término vale 100. Entonces:  $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_n = 100 + (n-1) \cdot 75 \rightarrow a_n = 75n + 25$

b) Dos años y medio son 30 meses por lo que  $a_{30} = 75 \cdot 30 + 25 = 2275$ . Tendrán 2275 €.

c) Tenemos que calcular  $n$  tal que  $a_n = 850$ . Sustituyendo en la expresión del término general tenemos:  $75n + 25 = 850 \rightarrow 75n = 825 \rightarrow n = 11$ . Tardarán 11 meses en reunir el dinero.

6. Para preparar una prueba, Pepe se ha propuesto el siguiente plan de entrenamiento: el primer día correrá un cuarto de hora, el segundo media hora, el tercero tres cuartos de hora y así sucesivamente hasta llegar a correr 3 horas. ¿Cuántos días tendrán que pasar?

El tiempo que Pepe corre cada día viene dado por una progresión aritmética cuyo primer término es  $\frac{1}{4}$  y la diferencia también es  $\frac{1}{4}$ .

$$\text{El término general es: } a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_n = \frac{1}{4} + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \rightarrow a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}n - \frac{1}{4} \rightarrow a_n = \frac{1}{4}n$$

Para llegar a correr 3 horas, hallamos el valor de  $n$  para el cual  $a_n = 3$ .

$$a_n = \frac{1}{4}n = 3 \rightarrow n = 3 \cdot 4 = 12 \quad \text{Tendrán que pasar 12 días.}$$

7. Partiendo de un triángulo equilátero, construimos otra figura dividiendo cada lado en 4. Repitiendo el proceso, se van formando nuevas figuras cada vez con un número mayor de lados. Escribe la fórmula que nos indica el número de lados que tiene la figura  $n$ . ¿Cuántos lados tendrá la figura al repetir el proceso 10 veces?

Como en cada paso cada lado se divide en 4, el número total de lados de cada figura se multiplica por 4. Por tanto, se trata de una progresión geométrica de razón  $r = 4$  cuyo primer término vale 3.

El término general es  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1}$ , que da la fórmula que indica el número de lados de la figura  $n$ .

Al repetir el proceso 10 veces, tenemos la figura que está en la posición 11.

Esta figura tendrá  $a^{11} = 3 \cdot 4^{11-1} = 3 \cdot 145728$  lados.

8. Interpola cuatro términos geométricos entre  $a_1 = 486$  y  $a_6 = 2$ .

$$a_6 = a_1 \cdot r^5 \rightarrow 2 = 486 \cdot r^5 \rightarrow r^5 = \frac{2}{486} = \frac{1}{243} \rightarrow r = \sqrt[5]{\frac{1}{243}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Por tanto: } a_2 = 486 \cdot \frac{1}{3} = 162, a_3 = 162 \cdot \frac{1}{3} = 54, a_4 = 54 \cdot \frac{1}{3} = 18, a_5 = 18 \cdot \frac{1}{3} = 6$$

9. Una bicicleta vale 2048 € y cada año pierde un 25 % de su valor. ¿Cuánto costará al cabo de 4 años? Al perder cada año un 25 % de su valor, mantiene un 75 %.

Entonces, el precio viene dado por el término general de una progresión geométrica de primer término 2048 y razón 0,75.

$$\text{Por tanto, el cuarto año valdrá: } a_4 = a_1 \cdot r^{4-1} \rightarrow a_4 = 2048 \cdot 0,75^{4-1} = 864 \text{ €}$$

10. Pablo lanza una pelota desde una ventana que se encuentra a 64 m de altura. Al llegar al suelo, rebota y asciende en cada nuevo bote  $\frac{2}{3}$  de la altura anterior. ¿A qué altura está la pelota tras rebotar 10 veces?

Se trata de una progresión geométrica de razón  $r = \frac{2}{3}$  cuyo primer término vale 64.

$$\text{Por tanto, el término general es: } a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 64 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\text{Tras rebotar 10 veces, tenemos que calcular el término 11: } a_{11} = 64 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{11-1} = 1,11$$

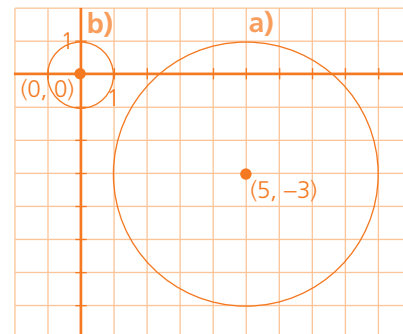
La pelota estará a 1,11 m de altura.

# GEOMETRÍA DEL PLANO. MOVIMIENTOS

## Evaluación A

1. Dibuja y describe el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan:

- a) 4 unidades del punto  $(5, -3)$ .
- b) 1 unidad del origen de coordenadas.
- a) El lugar geométrico es una circunferencia de centro  $(5, -3)$  y radio 4 unidades.
- b) El lugar geométrico es una circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio 1 unidad.



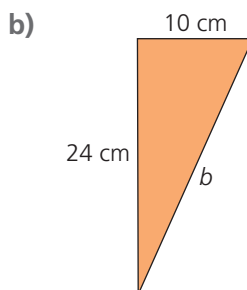
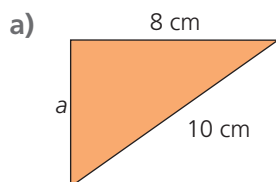
2. Dado el ángulo  $\hat{A} = 110^\circ$ , calcula la medida de su ángulo suplementario.

Calculamos la medida del ángulo suplementario,  $\hat{B}$ .  
 $\hat{B} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

### Recuerda

Dos ángulos  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  son suplementarios si:  
 $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$

3. Halla la longitud de los lados desconocidos de estos triángulos rectángulos.



### Recuerda

#### Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo de hipotenusa  $a$  y catetos  $b$  y  $c$ , se cumple que  $a^2 = b^2 + c^2$ .

a) Hallamos la medida de uno de los catetos aplicando el teorema de Pitágoras.

$$10^2 = 8^2 + a^2 \rightarrow a^2 = 100 - 64 = 36 \rightarrow a = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

b) Hallamos la hipotenusa aplicando el teorema de Pitágoras.

$$b^2 = 10^2 + 24^2 \rightarrow b^2 = 100 + 576 = 676 \rightarrow b = \sqrt{676} = 26 \text{ cm}$$

4. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de 16 cm de base y 12 cm de altura.

La diagonal del rectángulo es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son la base y la altura del rectángulo. Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular su longitud.

$$d^2 = 12^2 + 16^2 \rightarrow d^2 = 144 + 256 = 400 \rightarrow d = \sqrt{400} = 20 \text{ cm}$$

La diagonal mide 20 cm.

5. Halla el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 6 m y 8 m.

Las diagonales del rombo forman 4 triángulos rectángulos cuyos catetos miden  $6 : 2 = 3$  cm y  $8 : 2 = 4$  cm. Para hallar el perímetro calculamos uno de los lados aplicando el teorema de Pitágoras.

$$l^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow l^2 = 9 + 16 = 25 \rightarrow l = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Por tanto, el perímetro es:  $P = 4 \cdot l = 4 \cdot 5 = 20$  cm

6. Halla el perímetro y el área de estos cuadriláteros.

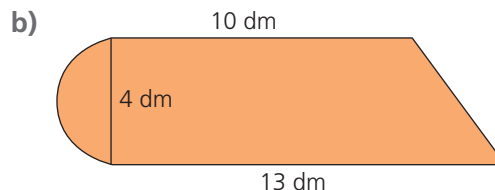
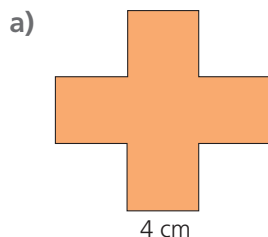
- a) Un romboide de lados 8 cm y 5 cm, y 4 cm de altura.
- b) Un rectángulo de 9 m de base y 0,5 dam de altura.

**Ten en cuenta**

Antes de operar, hay que expresar todas las medidas en las mismas unidades.

- a)  $P = 2a + 2b = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 8 = 10 + 16 = 26$  cm;  $A = b \cdot h = 8 \cdot 4 = 32$  cm<sup>2</sup>
- b) 0,5 dam = 5 m;  $P = 2b + 2h = 2 \cdot 9 + 2 \cdot 5 = 18 + 10 = 28$  cm;  $A = b \cdot h = 9 \cdot 5 = 45$  cm<sup>2</sup>

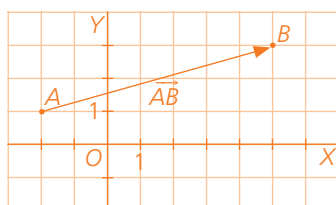
7. Halla el área de las siguientes figuras.



- a) La figura está formada por 5 cuadrados de 4 cm de lado. Por tanto:  $A = 5 \cdot l^2 = 5 \cdot 4^2 = 80$  cm<sup>2</sup>
- b) La figura está compuesta por un semicírculo y un trapecio rectángulo. Por tanto:

$$A = A_{\text{Semicírculo}} + A_{\text{Trapezio}} = \frac{\pi \cdot r^2}{2} + \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} + \frac{(13 + 10) \cdot 4}{2} = 6,28 + 46 = 52,28 \text{ dm}^2$$

8. Dibuja los puntos  $A(-2, 1)$  y  $B(5, 3)$  y el vector  $\overrightarrow{AB}$ . Determina las coordenadas del vector.



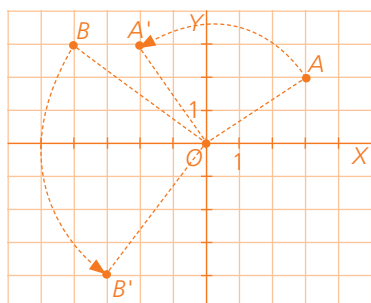
Las coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$  son:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (5 - (-2), 3 - 1) = (7, 2)$$

**Recuerda**

Si  $A = (a_1, a_2)$  y  $B = (b_1, b_2)$ , entonces las coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$  son  $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ .

9. Efectúa un giro de centro  $O$  y  $90^\circ$  de ángulo a los puntos  $A(3, 2)$  y  $B(-4, 3)$ . Indica las coordenadas de los nuevos puntos  $A'$  y  $B'$ .



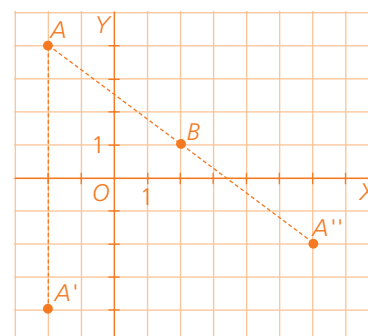
Las coordenadas son  $A'(-2, 3)$  y  $B'(-3, -4)$ .

**Recuerda**

Si el ángulo de giro es positivo, el sentido del giro es contrario al de las agujas del reloj.

10. Indica las coordenadas del punto simétrico a  $A(-2, 4)$ :

- a) Respecto al eje de abscisas.
  - b) Respecto al punto  $B(2, 1)$ .
- a) Respecto al eje de abscisas, el punto simétrico es  $A'(-2, -4)$ .
  - b) Respecto al punto  $B(2, 1)$ , el punto simétrico es  $A''(6, -2)$ .



# Evaluación B

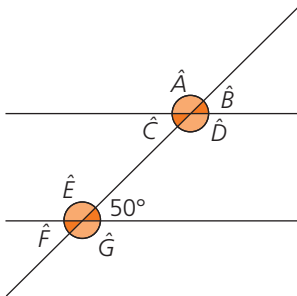
1. Traza dos rectas secantes y dibuja el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ellas.

Comprobar que los alumnos dibujan dos rectas secantes y trazan las bisectrices de los ángulos que forman.

**Recuerda**

La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las rectas  $r$  y  $s$  que forman dicho ángulo.

2. Halla la medida de los ángulos que faltan.



$\hat{F} = 50^\circ$  por ser opuesto por el vértice al ángulo dado.

$\hat{B} = \hat{C} = 50^\circ$  por ser correspondientes a  $50^\circ$  y a  $\hat{F}$ , respectivamente.

$\hat{E} = 130^\circ$  por ser adyacente al ángulo dado.

$\hat{G} = 130^\circ$  por ser opuesto por el vértice al ángulo  $\hat{E}$ .

$\hat{A} = \hat{D} = 130^\circ$  al ser correspondientes a los ángulos  $\hat{E}$  y  $\hat{G}$ , respectivamente.

**Recuerda**

- Dos ángulos opuestos por el vértice tienen la misma amplitud.
- Dos ángulos adyacentes son suplementarios.

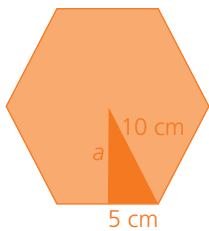
3. Halla la altura de un triángulo equilátero de 8 cm de lado.

La altura divide al triángulo equilátero en dos triángulos rectángulos cuya hipotenusa coincide con uno de sus lados, y uno de los catetos es la mitad de uno de los lados.

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular el otro cateto.

$$8^2 = h^2 + 4^2 \rightarrow h^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48 \rightarrow h = \sqrt{48} = 6,93 \text{ cm}$$

4. Calcula la apotema de un hexágono regular de 10 m de lado.



Como el lado del hexágono mide 10 cm, la longitud del segmento que une el centro con el vértice también mide 10 cm.

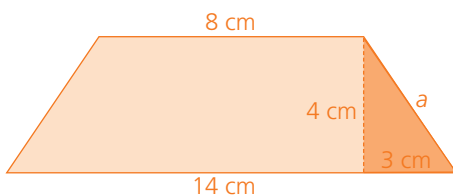
Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la apotema.

$$10^2 = a^2 + 5^2 \rightarrow a^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75 \rightarrow a = \sqrt{75} = 8,66 \text{ cm}$$

**Ten en cuenta**

En un hexágono regular, los triángulos formados al unir el centro con el vértice son equiláteros.

5. Halla el perímetro y el área de un trapecio isósceles cuyas bases miden 14 cm y 8 cm, y su altura 4 cm.



Para calcular el perímetro tenemos que hallar la longitud del lado  $a$ .

Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$a^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \rightarrow a = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Por tanto:

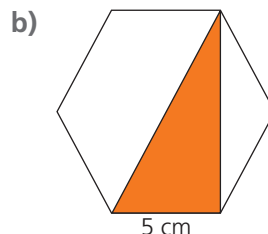
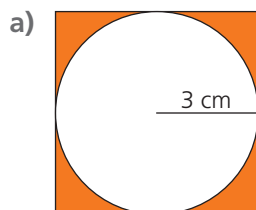
$$P = 14 + 8 + 5 + 5 = 32 \text{ cm}$$

Calculamos el área utilizando la fórmula.

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(14 + 8) \cdot 4}{2} = 44 \text{ cm}^2$$



6. Determina el área de las regiones sombreadas.



a) Para calcular el área hallamos el área del cuadrado y le restamos el del círculo.

$$A = A_{\text{Cuadrado}} - A_{\text{Círculo}} = l^2 - \pi r^2 = 6^2 - \pi \cdot 3^2 = 7,73 \text{ cm}^2$$

b) Para hallar el área del triángulo necesitamos calcular la altura. La hipotenusa es el doble del lado del hexágono. Por tanto, aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$10^2 = h^2 + 5^2 \rightarrow h^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75 \rightarrow h = \sqrt{75} = 8,66 \text{ cm}$$

$$\text{Luego el área del triángulo es: } A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 8,66}{2} = 21,65 \text{ cm}^2$$

7. Calcula.

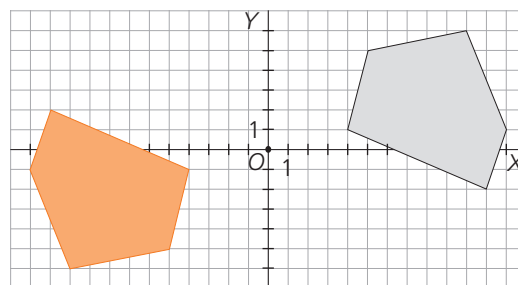
a) El vector de traslación que transforma el punto  $P(1, 3)$  en el  $P'(-2, 5)$ .

b) Las coordenadas del punto  $P$  si al trasladarlo mediante el vector  $\vec{v} = (4, 0)$  se ha transformado en el punto  $P'(7, 13)$ .

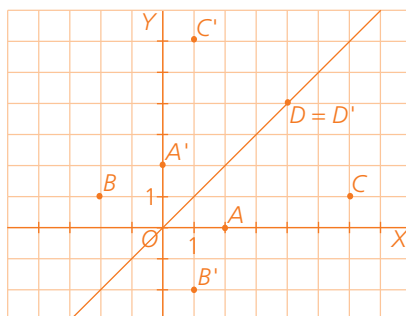
a) Calculamos el vector de traslación:  $\vec{v} = (-2 - 1, 5 - 3) = (-3, 2)$

b) Sea  $P = (p_1, p_2)$ . Entonces:  $(p_1, p_2) + (4, 0) = (7, 13) \rightarrow (p_1, p_2) = (7 - 4, 13 - 0) = (3, 13)$

8. Dibuja la figura que se obtiene al girar este polígono con centro  $O$  y ángulo  $180^\circ$ .



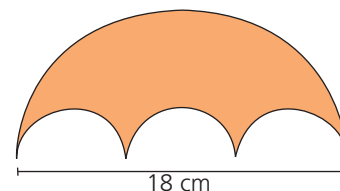
9. Dibuja una recta que pase por los puntos  $(2, 2)$  y  $(-1, -1)$ . Halla respecto de ella los simétricos de los puntos  $A(2, 0)$ ,  $B(-2, 1)$ ,  $C(6, 1)$  y  $D(4, 4)$ .



10. Halla el área de la siguiente figura.

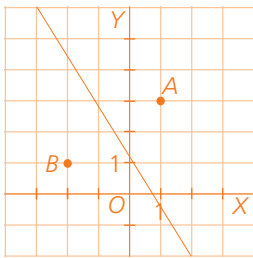
El área coloreada se calcula restando al área de un semicírculo de radio 9 cm, tres semicírculos de radio 3 cm. Por tanto:

$$A = \frac{\pi \cdot R^2}{2} - 3 \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 9^2}{2} - 3 \cdot \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = 127,23 - 42,41 = 84,82 \text{ cm}^2$$



# Evaluación C

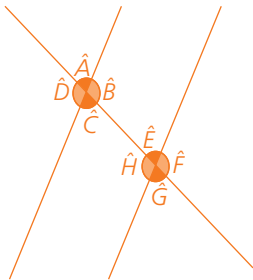
1. Representa los puntos  $A(1, 3)$  y  $B(-2, 1)$  y halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de ellos. ¿Cuál es el nombre de este lugar geométrico?



El lugar geométrico es la mediatriz del segmento  $\overline{AB}$ .

2. Dibuja dos rectas paralelas y una secante a ellas. Nombra los ángulos que se forman y compáralos según sean iguales o suplementarios razonando la respuesta.

Respuesta abierta:

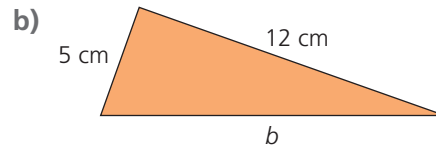
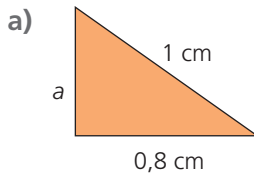


$\hat{A} = \hat{C} = \hat{E} = \hat{G}$  pues el ángulo  $\hat{A}$  es opuesto por el vértice al  $\hat{C}$  y los ángulos  $\hat{E}$  y  $\hat{G}$  son sus correspondientes.

$\hat{B} = \hat{D} = \hat{F} = \hat{H}$  pues el ángulo  $\hat{B}$  es opuesto por el vértice al  $\hat{D}$  y los ángulos  $\hat{F}$  y  $\hat{H}$  son sus correspondientes.

$\hat{A}$  y  $\hat{B}$ ,  $\hat{E}$  y  $\hat{F}$ ,  $\hat{A}$  y  $\hat{D}$ ,  $\hat{E}$  y  $\hat{H}$ ,  $\hat{C}$  y  $\hat{B}$ ,  $\hat{G}$  y  $\hat{F}$ ,  $\hat{C}$  y  $\hat{D}$ ,  $\hat{G}$  y  $\hat{H}$  son suplementarios por ser adyacentes.

3. Determina la longitud de los lados desconocidos de estos triángulos rectángulos.



- a) Calculamos el cateto aplicando el teorema de Pitágoras.  
 $1^2 = 0,8^2 + a^2 \rightarrow a^2 = 1 - 0,64 = 0,36 \rightarrow a = \sqrt{0,36} = 0,6 \text{ cm}$
- b) Hallamos la hipotenusa aplicando el teorema de Pitágoras.  
 $b^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 \rightarrow b = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$

4. Halla la altura de un triángulo isósceles de 10 cm de base y 36 cm de perímetro.

Al ser la base 10 cm y el perímetro 36 cm, cada lado igual mide  $(36 - 10) : 2 = 13 \text{ cm}$ .

Al trazar la altura sobre el lado desigual, se forman dos triángulos rectángulos de base 5 cm. Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar la altura.

$$13^2 = 5^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 169 - 25 = 144 \rightarrow h = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

5. Calcula el perímetro y el área de un rombo cuyas diagonales miden 12 cm y 16 cm.

Para calcular el perímetro tenemos que hallar la medida del lado del rombo.

Al trazar las diagonales del rombo, se forman 4 triángulos rectángulos de  $12 : 2 = 6 \text{ cm}$  de base y  $16 : 2 = 8 \text{ cm}$  de altura. Como la hipotenusa coincide con el lado del rombo, aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular su longitud.

$$l^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \rightarrow l = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

Por tanto:  $P = 4 \cdot l = 4 \cdot 10 = 40 \text{ cm}$

Calculamos el área del rombo mediante la fórmula:  $A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ cm}^2$

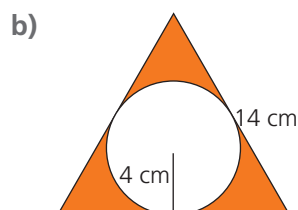
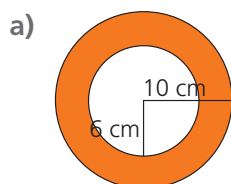
- 6.** Joaquín quiere cercar un terreno circular de 20 m de diámetro. ¿Cuántos metros de valla necesitará? ¿Qué superficie tiene el terreno?

Para saber cuántos metros de valla necesita, calculamos la longitud de la circunferencia.

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 10 = 62,83 \text{ cm}$$

La superficie del terreno es el área:  $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 10^2 = 314,16 \text{ cm}^2$

- 7.** Halla el área de estas regiones sombreadas.



- a) Calculamos el área de una corona circular de radio mayor  $R = 10 \text{ cm}$  y radio menor  $r = 6 \text{ cm}$ .

$$A = \pi \cdot (R^2 + r^2) = \pi \cdot (10^2 - 6^2) = 201,06 \text{ cm}^2$$

- b) Calculamos el área del triángulo equilátero de 14 cm de lado y le restamos la del círculo de radio 4 cm. Primero hallamos la altura del triángulo mediante el teorema de Pitágoras.

$$14^2 = 7^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 196 - 49 = 147 \rightarrow h = \sqrt{147} = 12,12 \text{ cm}$$

Entonces:  $A = A_{\text{Triángulo}} - A_{\text{Círculo}} = \frac{b \cdot h}{2} - \pi \cdot r^2 = \frac{14 \cdot 12,12}{2} - \pi \cdot 4^2 = 84,84 - 50,27 = 34,57 \text{ cm}^2$

- 8.** Los vértices de un triángulo son  $A(-1, 4)$ ,  $B(1, 1)$  y  $C(-1, -1)$ . Determina las coordenadas de la figura obtenida al aplicar una traslación mediante el vector  $\vec{v} = (4, -1)$ .

Sumamos a cada punto las coordenadas del vector.

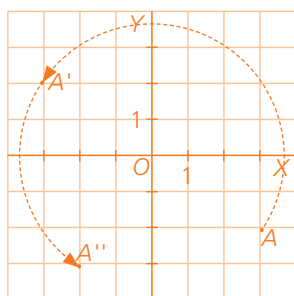
$$A' = (-1, 4) + (4, -1) = (3, 3)$$

$$B' = (1, 1) + (4, -1) = (5, 0)$$

$$C' = (-1, -1) + (4, -1) = (3, -2)$$

La figura obtenida es un triángulo de coordenadas  $A'(3, 3)$ ,  $B'(5, 0)$  y  $C'(3, -2)$ .

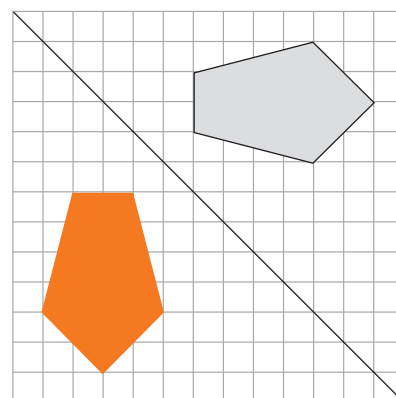
- 9.** Aplica al punto  $A(3, -2)$  un giro de centro  $O$  y ángulo  $180^\circ$  y, a continuación, otro de  $90^\circ$ . ¿Cómo podemos llegar a ese punto con un solo giro?



Al aplicar los dos giros al punto  $A(3, -2)$  obtenemos el punto  $(-2, 3)$ .

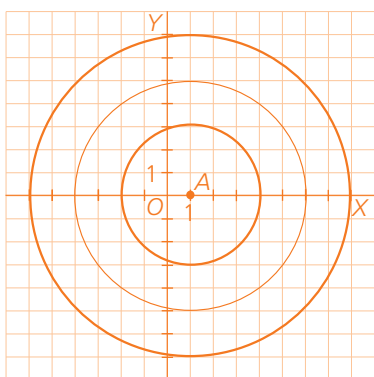
Se podría llegar a ese punto haciendo un único giro de ángulo  $270^\circ$ .

- 10.** Halla el simétrico de la siguiente figura respecto de la recta marcada.



## Evaluación D

1. Dada una circunferencia de centro  $A(1, 0)$  y 5 unidades de radio, dibuja y describe el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a 2 unidades de ella.



El lugar geométrico de los puntos que se encuentran a 2 unidades de ella son dos circunferencias concéntricas, una de radio 3 unidades y otra de radio 7 unidades.

2. ¿Cuánto mide el suplementario de un ángulo de  $40^\circ$ ? ¿Y su opuesto por el vértice? ¿Y su adyacente? ¿Y el suplementario de su suplementario?

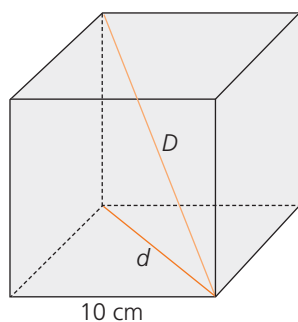
El suplementario de un ángulo de  $40^\circ$  mide  $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ .

Su opuesto por el vértice mide  $40^\circ$  al ser iguales

El adyacente de un ángulo es su suplementario, por lo que mide  $140^\circ$ .

El suplementario del suplementario es el mismo ángulo, por lo que mide  $40^\circ$ .

3. Halla la diagonal de un cubo de lado 10 cm ayudándote de la figura.



Primero calculamos el valor de la diagonal  $d$  aplicando el teorema de Pitágoras.

$$d^2 = l^2 + l^2 = 10^2 + 10^2 = 200 \rightarrow d = \sqrt{200} = 14,14 \text{ cm}$$

Volvemos a aplicar el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de la diagonal del cubo,  $D$ .

$$D^2 = l^2 + d^2 = 10^2 + 14,14^2 = 300 \rightarrow D = \sqrt{300} = 17,32 \text{ cm}$$

4. Calcula la altura a la que apoya en la pared una escalera de 3 m de largo si separamos el pie a 40 cm de la pared.

La escalera forma un triángulo rectángulo con la pared y el suelo. Uno de los catetos es la distancia del pie de la escalera a la pared,  $40 \text{ cm} = 0,4 \text{ m}$ , y la hipotenusa es la longitud de la escalera. Calculamos el otro cateto aplicando el teorema de Pitágoras.

$$3^2 = 0,4^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 9 - 0,16 = 8,84 \rightarrow h = \sqrt{8,84} = 2,97 \text{ m}$$

Apoyará a 2,97 m de la pared.

5. Razona si los siguientes valores corresponden a los lados de un triángulo rectángulo.

a) 9, 40 y 41

b) 20, 21 y 29

c) 6, 8 y 12

d) 7, 24 y 25

Para comprobarlo, estudiamos si se verifica el teorema de Pitágoras.

a)  $41^2 = 40^2 + 9 \rightarrow 1681 = 1600 + 81 \rightarrow$  Sí corresponden a los lados de un triángulo rectángulo.

b)  $29^2 = 20^2 + 21^2 \rightarrow 841 = 400 + 441 \rightarrow$  Sí corresponden a los lados de un triángulo rectángulo.

c)  $12^2 \neq 6^2 + 8^2 \rightarrow 144 \neq 36 + 64 \rightarrow$  No corresponden a los lados de un triángulo rectángulo.

d)  $25^2 = 7^2 + 24^2 \rightarrow 625 = 49 + 576 \rightarrow$  Sí corresponden a los lados de un triángulo rectángulo.

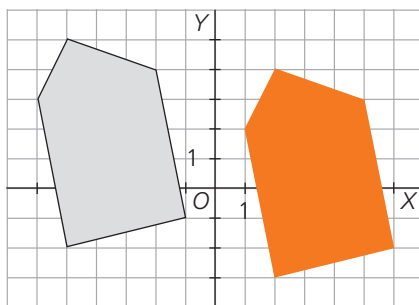
- 6.** Halla el área de un hexágono regular de lado 8 cm.

Calculamos la apotema aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo formado por la apotema, el segmento que une el centro del hexágono con un vértice y la mitad de uno de los lados.

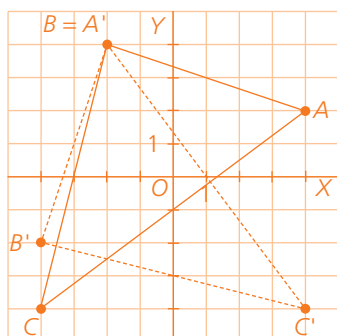
$$8^2 = 4^2 + a^2 \rightarrow a^2 = 64 - 16 = 48 \rightarrow a = \sqrt{48} = 6,93 \text{ cm}$$

$$\text{Hallamos el área aplicando la fórmula: } A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 6,93}{2} = \frac{332,64}{2} = 166,32 \text{ cm}^2$$

- 7.** Traslada la siguiente figura mediante el vector  $\vec{v} = (7, -1)$ .



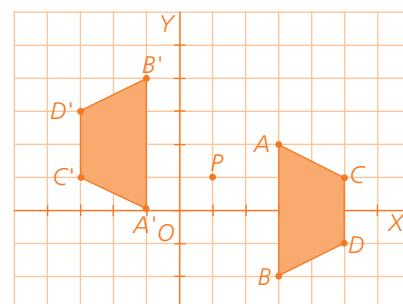
- 8.** Halla las coordenadas de los vértices de la figura que se obtiene al girar con centro  $O$  y un ángulo de  $90^\circ$  el triángulo que tiene por vértices  $A(4, 2)$ ,  $B(-2, 4)$  y  $C(-4, -4)$ .



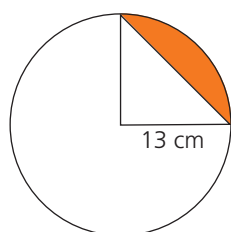
Al girar el triángulo se obtiene otro triángulo de coordenadas  $A'(-2, 4)$ ,  $B'(-4, -2)$  y  $C'(4, -4)$ .

- 9.** Halla la figura simétrica respecto al punto  $P(1, 1)$  del cuadrilátero de vértices  $A(3, 2)$ ,  $B(3, -2)$ ,  $C(5, 1)$  y  $D(5, -1)$ .

La figura simétrica es otro cuadrilátero de vértices  $A'(-1, 0)$ ,  $B'(-1, 4)$ ,  $C'(-3, 1)$  y  $D'(-3, 3)$ .



- 10.** Calcula el área de la región coloreada.



El área de la región coloreada es un sector circular de  $90^\circ$  menos un triángulo isósceles de 13 cm base y altura. Por tanto:

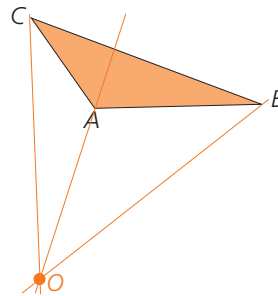
$$A = A_{\text{Sector}} - A_{\text{Triángulo}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 90}{360} - \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\pi \cdot 13^2 \cdot 90}{360} - \frac{13 \cdot 13}{2} = 132,73 - 84,5 = 48,23 \text{ cm}^2$$

# TRIÁNGULOS. PROPIEDADES

## Evaluación A

1. Halla gráficamente el ortocentro de este triángulo.

**Recuerda**  
El **ortocentro** es el punto de intersección de las alturas de un triángulo.

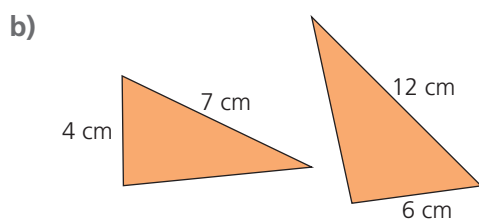
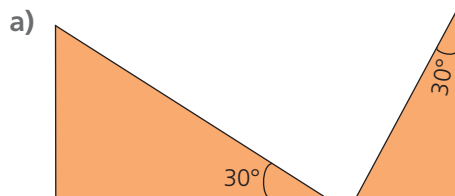


2. Una finca está delimitada por tres carreteras rectas que forman un triángulo. Queremos construir un garaje en ella de manera que la distancia a las tres carreteras sea la menor posible. ¿Dónde debemos colocarlo?

El garaje debería colocarse en el incentro de la finca, ya que es el punto que está a la misma distancia de los tres lados, es decir, de las tres carreteras.

**Recuerda**  
El **incentro** es el punto de intersección de las bisectrices de un triángulo y equidista de los tres lados.

3. Indica razonadamente si los siguientes triángulos son semejantes.



**Recuerda**  
Dos triángulos son semejantes si:

- Tienen los tres lados proporcionales.
- Tienen dos ángulos iguales.
- Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman coincide.

- a) Son semejantes porque tienen dos ángulos iguales: uno recto y otro de 30°.
- b) No se puede saber si son semejantes ya que falta la medida del tercer lado. Aún así podríamos decir que no son semejantes porque tienen distinta forma.

4. Los lados de un triángulo miden 6 cm, 14 cm y 18 cm. Calcula las dimensiones de otro triángulo semejante a él cuyo lado menor mida 24 cm. ¿Cuál es la razón de semejanza entre ellos?

Calculamos la razón de semejanza dividiendo las medidas de los lados correspondientes.

En este caso,  $r = \frac{24}{6} = 4$  por lo que cada lado del segundo triángulo es 4 veces el lado correspondiente del primero.

Por tanto, los lados miden 24 cm, 56 cm y 72 cm, respectivamente.

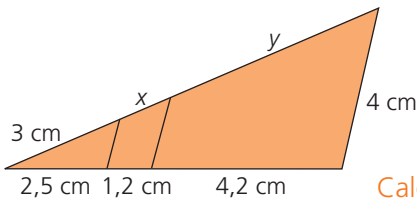
5. Halla la altura de un edificio que produce una sombra de 15 m sabiendo que, a esa misma hora, un árbol de 10 m da una sombra de 3 m.

Los triángulos que forman el edificio y el árbol con sus sombras son semejantes ya que tienen un ángulo recto cada uno y el ángulo del rayo de sol también es el mismo en los dos triángulos. Por tanto, los lados son proporcionales. Llamamos  $h$  a la altura del edificio.

$$\frac{h}{10} = \frac{15}{3} \rightarrow h = \frac{10 \cdot 15}{3} = 50$$

El edificio mide 50 m.

6. Determina los valores desconocidos de la siguiente figura.



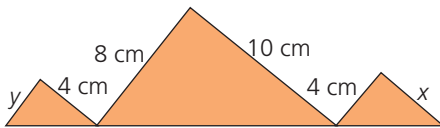
### Recuerda

**Teorema de Tales.** Si varias rectas paralelas se cortan mediante una recta secante, los segmentos que se forman son proporcionales.

Calculamos  $x$  e  $y$  aplicando el teorema de Tales.

$$\frac{3}{2,5} = \frac{x}{1,2} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 1,2}{2,5} = 1,44 \text{ cm} \quad \frac{3}{2,5} = \frac{y}{4,2} \rightarrow y = \frac{3 \cdot 4,2}{2,5} = 5,04 \text{ cm}$$

7. Halla los valores desconocidos de esta figura.



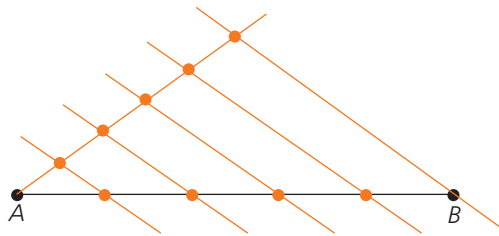
Los tres triángulos son semejantes ya que tienen los tres ángulos iguales. Por tanto, los lados tienen que ser proporcionales.

Aplicamos el teorema de Tales para hallar  $x$  e  $y$ .

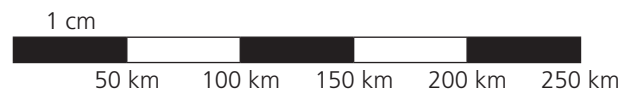
$$\frac{x}{10} = \frac{4}{8} \rightarrow x = \frac{10 \cdot 4}{8} = 5 \text{ cm}$$

$$\frac{10}{8} = \frac{4}{y} \rightarrow y = \frac{8 \cdot 4}{10} = 3,2 \text{ cm}$$

8. Divide este segmento en cinco partes iguales.



9. En un mapa aparece esta escala:



- Exprésala en forma de razón.
  - Calcula la distancia real de dos ciudades si en un mapa a esa escala la distancia es 3 cm.
  - Calcula la distancia en el mapa de dos ciudades si sabemos que en la realidad están a 750 km.
- Como 1 cm equivale a 50 km, pasando a las mismas unidades tenemos que 1 cm equivale a 5 000 000 cm. Luego la escala es 1:5 000 000.
  - Del dibujo se deduce que 3 cm en el mapa equivalen a 150 km en la realidad.
  - Llamamos  $x$  a la distancia en el mapa entre las dos ciudades. Entonces, aplicando la escala tenemos:
 
$$x = \frac{750}{5000000} = 0,00015 \text{ km} = 15 \text{ cm}$$

### Ten en cuenta

La escala relaciona las distancias expresadas en la misma unidad de medida.

10. La distancia entre Madrid y Cáceres es de 300 km. Si tenemos un mapa en el que la distancia mide 6 cm, ¿a qué escala se ha realizado dicho mapa?

Sabemos que 6 cm corresponden a 300 km.

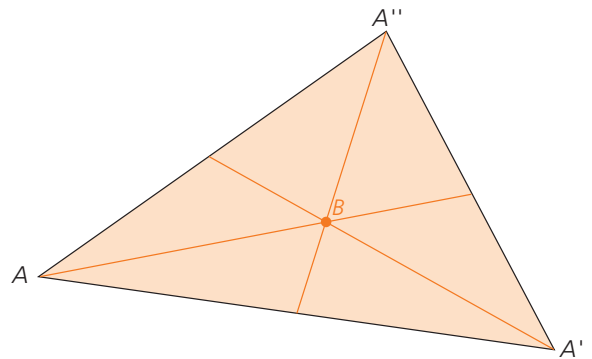
Como la escala relaciona las distancias expresadas en la misma unidad de medida, pasamos las longitudes a la misma unidad de medida: 300 km = 30 000 000 cm

Escala =  $\frac{6}{30000000} = \frac{1}{5000000} = 1:5000000$ . Por tanto, 1 cm en el plano equivalen a 5 000 000 cm.

# Evaluación B

1. Halla gráficamente el baricentro de este triángulo.

**Recuerda**  
El **baricentro** es el punto de intersección de las medianas de un triángulo. Es el centro de gravedad del triángulo.



2. En una aldea hay solo 3 casas que forman un triángulo. Quieren colocar una farola de manera que todas las casas queden iluminadas de la misma forma. ¿Dónde habrá que colocarla?

Si la farola tiene que iluminar a todas las casas por igual, entonces tiene que estar a la misma distancia de todos los vértices del triángulo. Por tanto, la farola estará colocada en el circuncentro del triángulo.

**Recuerda**  
El **circuncentro** es el punto de intersección de las mediatrices de un triángulo. Este punto equidista de los vértices.

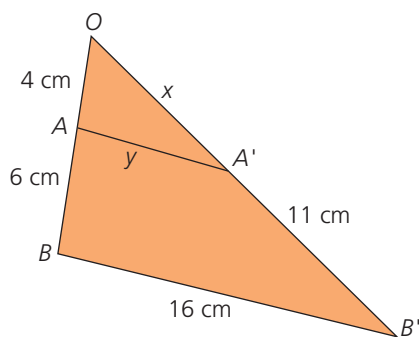
3. Los dos ángulos iguales de un triángulo isósceles tienen una amplitud de  $40^\circ$  y el ángulo desigual de otro triángulo isósceles mide  $110^\circ$ . ¿Son semejantes? Razona la respuesta.

Hallamos la amplitud del ángulo desigual del primer triángulo isósceles.

$$180^\circ - 40^\circ \cdot 2 = 100^\circ$$

En el segundo triángulo, el ángulo desigual mide  $110^\circ$  que es distinto al ángulo desigual del primero. Como todos los ángulos deben ser iguales, los dos triángulos no son semejantes.

4. Determina la longitud de los lados desconocidos de este triángulo.



Calculamos el valor de  $x$  aplicando el teorema de Tales.

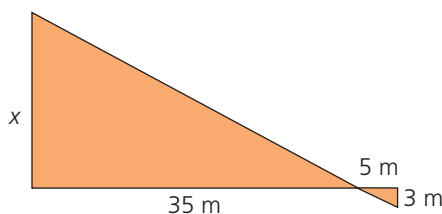
$$\frac{4}{x} = \frac{6}{11} \rightarrow x = \frac{11 \cdot 4}{6} = 7,33 \text{ cm}$$

Hallamos el valor de  $y$  teniendo en cuenta que los triángulos  $OAA'$  y  $OBB'$  son semejantes ya que tienen los ángulos iguales.

$$\frac{4}{10} = \frac{y}{16} \rightarrow y = \frac{16 \cdot 4}{10} = 6,4 \text{ cm}$$

**Ten en cuenta**  
Para calcular la longitud del lado desconocido  $y$ , utilizaremos la semejanza del triángulo interior y el triángulo exterior.

5. Halla el valor de  $x$  en la siguiente figura.



Los dos triángulos de la figura son semejantes ya que los ángulos son iguales.

Por tanto, los lados son proporcionales.

$$\text{Entonces: } \frac{x}{3} = \frac{35}{5} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 35}{5} = 21 \text{ cm}$$

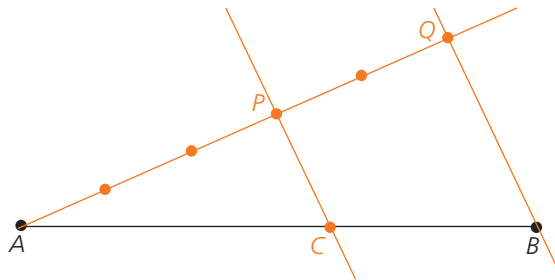


6. Manolo y Antonio miden 1,86 m y 1,92 m, respectivamente. Sabiendo que en un momento del día la sombra de Manolo es de 62 cm, ¿cuánto medirá la sombra de Antonio?

Los triángulos que forman cada uno con su sombra son semejantes ya que tienen dos ángulos iguales: un ángulo recto y el ángulo del rayo de sol. Por tanto, los lados son proporcionales.

Entonces:  $\frac{186}{192} = \frac{62}{x} \rightarrow x = \frac{192 \cdot 62}{186} = 64 \text{ cm}$  La sombra de Antonio mide 64 cm.

7. Divide el siguiente segmento en dos partes proporcionales a 3 y 5.



8. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- El incentro es el punto de intersección de las tres alturas de un triángulo.
  - La razón de semejanza entre los perímetros de dos polígonos es igual que la razón entre sus lados.
  - Dos triángulos semejantes tienen los tres ángulos proporcionales.
  - La escala de un plano se puede medir en centímetros.
- FALSO. El incentro es el punto de intersección de las bisectrices de un triángulo. El punto de intersección de las alturas es el ortocentro.
  - VERDADERO. Al ser el perímetro una longitud, se mantiene la razón de semejanza.
  - FALSO. Dos triángulos semejantes tienen los ángulos iguales, no proporcionales.
  - FALSO. La escala es una razón de semejanza y, por tanto, no tiene unidades.

9. Jorge ha construido una maqueta de un coche a escala 1:18. Si las dimensiones del coche al que representa son 4,5 m de largo, 2 m de ancho y 1,25 m de alto, ¿cuál serán las dimensiones de la maqueta?

Como la escala es 1:18, 1 cm en la maqueta corresponde a 18 cm en la realidad.

Pasamos las medidas a centímetros.

$$4,5 \text{ m} = 450 \text{ cm} \quad 2 \text{ m} = 200 \text{ cm} \quad 1,25 \text{ m} = 125 \text{ cm}$$

Llamamos  $x$ ,  $y$ ,  $z$  al largo, ancho y alto del coche de la maqueta, respectivamente.

$$x = \frac{450}{18} = 25 \text{ cm} \quad y = \frac{200}{18} = 11,11 \text{ cm} \quad z = \frac{125}{18} = 6,94 \text{ cm}$$

Las dimensiones de la maqueta son 25 cm de largo, 11,11 cm de ancho y 6,94 cm de alto.

### Ten en cuenta

Recuerda que la escala relaciona longitudes expresadas en la misma unidad de medida.

10. Halla la escala de un plano en el que un segmento que mide 10 cm representa 120 m de longitud.

Sabemos que 10 cm equivalen a 120 m.

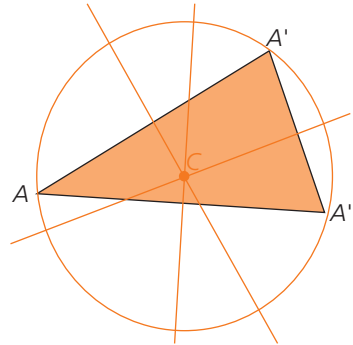
Como la escala relaciona las distancias expresadas en la misma unidad de medida, pasamos las longitudes a la misma unidad de medida: 120 m = 12 000 cm

$$\text{Escala} = \frac{10}{12000} = \frac{1}{1200} = 1 : 1200 \text{ cm}$$

Por tanto, 1 cm en el plano corresponden a 1 200 cm en la realidad.

# Evaluación C

1. Halla gráficamente el circuncentro y la circunferencia circunscrita de este triángulo.

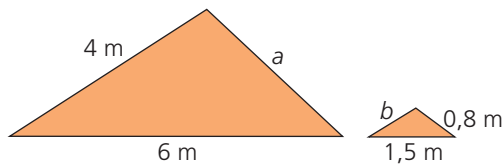


2. Dibuja un triángulo equilátero y traza en él las circunferencias inscrita y circunscrita. ¿Cómo son?

Comprobar que los alumnos dibujan un triángulo equilátero y dibujan las circunferencias inscrita y circunscrita.

Estas circunferencias son concéntricas.

3. Halla la longitud de los lados desconocidos en estos triángulos semejantes. Determina la razón de semejanza. ¿Qué indica?



Al ser triángulos semejantes, sus lados tienen que ser proporcionales. Por tanto:

$$\frac{4}{b} = \frac{6}{1,5} \rightarrow b = \frac{4 \cdot 1,5}{6} = 1 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{0,8} = \frac{6}{1,5} \rightarrow a = \frac{6 \cdot 0,8}{1,5} = 3,2 \text{ cm}$$

La razón de semejanza es 4 (se calcula dividiendo cualquier lado del primer triángulo entre el correspondiente del segundo) e indica que los lados del primer triángulo son 4 veces mayor que los del segundo.

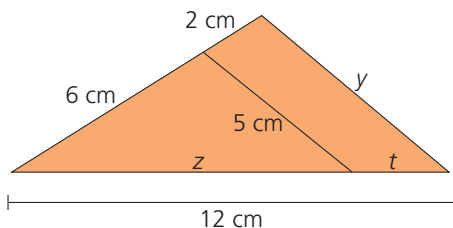
4. Un edificio de 48 m proyecta a cierta hora del día una sombra de 12 m. ¿Cuál es la altura de Alfonso si a esa misma hora su sombra mide 45 cm?

Los triángulos que forman el edificio y Alfonso con sus sombras son semejantes ya que tienen dos ángulos iguales: uno recto y el ángulo del rayo de sol. Por tanto, los lados son proporcionales.

Entonces:  $\frac{48}{x} = \frac{12}{0,45} \rightarrow x = \frac{48 \cdot 0,45}{12} = 1,8 \text{ m}$

Alfonso mide 1,8 m.

5. Determina los lados desconocidos de la siguiente figura.



Calculamos z aplicando el teorema de Tales.

$$\frac{6}{z} = \frac{8}{12} \rightarrow z = \frac{12 \cdot 6}{8} = 9 \text{ cm}$$

Entonces,  $t = 3 \text{ cm}$ .

Ahora calculamos y teniendo en cuenta que los dos triángulos, interior y exterior, son semejantes y, por tanto, sus lados son proporcionales:

$$\frac{6}{15} = \frac{8}{y} \rightarrow y = \frac{5 \cdot 8}{6} = 6,67 \text{ cm}$$

6. Sean dos cuadrados cuyos lados miden 3 cm y 6 cm, respectivamente.

- ¿Son semejantes? Indica la razón de semejanza.
- ¿Cuál es la razón entre sus perímetros?
- ¿Cuál es la razón entre sus áreas?

a) Dos cuadrados siempre son semejantes porque sus ángulos son iguales y sus lados proporcionales. Como el lado del segundo cuadrado es el doble que el del primero, la razón de semejanza es 2.

b) El perímetro del primer cuadrado es 12 cm, y del segundo, 24 cm. Luego la razón entre sus perímetros también es 2.

c) El área del primer cuadrado es 9 cm<sup>2</sup>, y el del segundo, 36 cm<sup>2</sup>. Entonces, la razón entre sus áreas es 4. Siempre la razón entre áreas es el cuadrado de la razón entre longitudes.

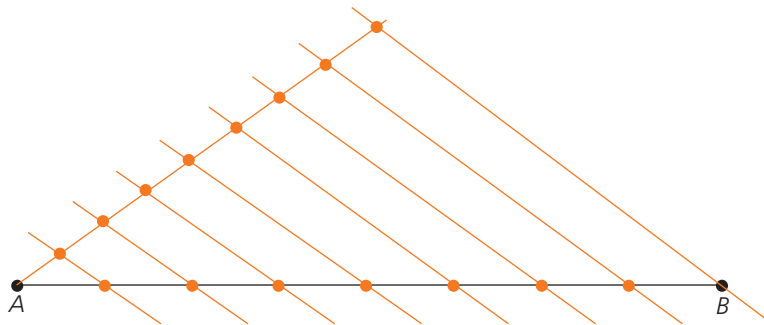
7. Un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 30° y un lado de 5 cm de longitud. Otro triángulo rectángulo tiene un ángulo de 60° y un lado de 3 cm de longitud. ¿Son semejantes ambos triángulos?

Los ángulos del primer triángulo miden 90°, 30° y 60° (para que la suma de los tres sea 180°).

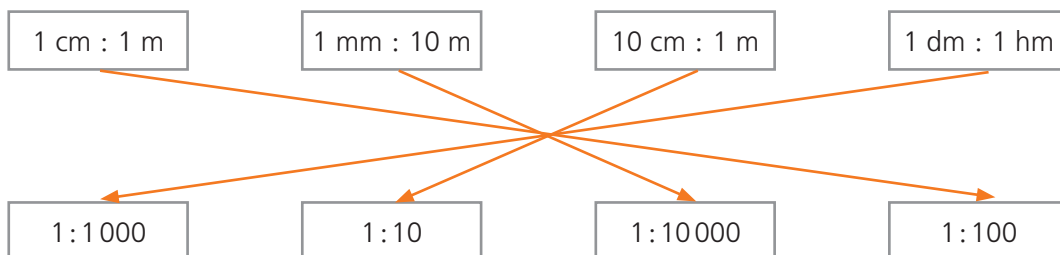
Los ángulos del segundo triángulo miden 90°, 60° y 30°.

En consecuencia, e independientemente de las medidas de los lados, los dos triángulos tienen los ángulos iguales por lo que son semejantes.

8. Divide este segmento en ocho partes iguales.



9. Relaciona cada equivalencia con su escala.



10. El paragolpes de la maqueta de un coche mide 3 cm. Si sabemos que en el coche al que representa mide 1,5 m, ¿a qué escala está hecha la maqueta?

Sabemos que 3 cm equivalen a 1,5 m.

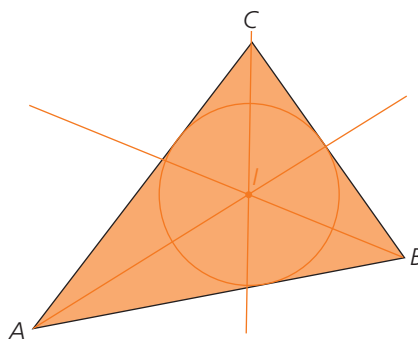
Como la escala relaciona las distancias expresadas en la misma unidad de medida, pasamos las longitudes a la misma unidad de medida: 1,5 m = 150 cm

$$\text{Escala} = \frac{3}{150} = \frac{1}{50} = 1 : 50$$

Por tanto, 1 cm en la maqueta representa 50 cm en la realidad.

## Evaluación D

1. Dado el siguiente triángulo, traza el incentro y la circunferencia inscrita.

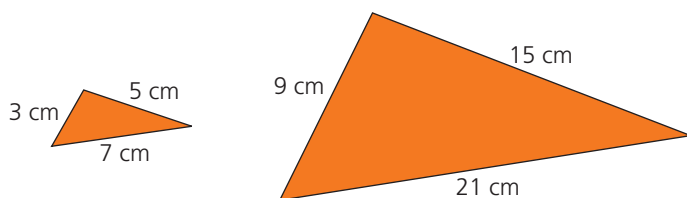


2. Hemos cortado una pieza de forma triangular en una cartulina. Si queremos que esta figura se mantenga en equilibrio apoyándola en un solo punto, ¿qué punto elegiríamos?

Como la figura tiene forma triangular, para mantenerla en equilibrio habría que apoyarla sobre su centro de gravedad, es decir, sobre su baricentro.

3. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
- a) Dos triángulos equiláteros siempre son semejantes.
  - b) Dos triángulos isósceles siempre son semejantes.
  - c) Dos triángulos rectángulos isósceles siempre son semejantes.
  - d) Dos triángulos rectángulos siempre son semejantes.
- a) VERDADERO. Al tener los tres lados iguales siempre van a tener los lados proporcionales y los ángulos iguales.
- b) FALSO. Los dos lados iguales serán proporcionales pero el lado desigual no tiene por qué serlo.
- c) VERDADERO. Tienen un ángulo igual (el recto) y los lados que lo forman son proporcionales (por ser isósceles).
- d) FALSO. Con este dato conocemos que tienen un ángulo igual. Los otros dos ángulos pueden ser distintos.
4. Explica si los siguientes pares de triángulos son semejantes.

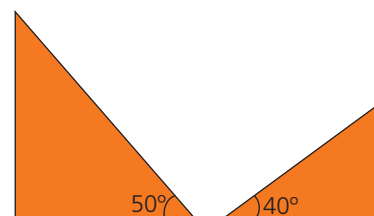
a)



a) Sí son semejantes ya que todos los lados son proporcionales.

b) Sí son semejantes ya que todos los ángulos son iguales (el primero tiene un ángulo recto, otro de  $50^\circ$  y, por lo tanto, el tercero es de  $40^\circ$ , igual que el segundo).

b)



5. Martina mide 1,8 m y quiere saber la altura de una torre. Para ello, coloca un espejo entre ella y la torre a 160 cm de sus pies y a 6,4 m de la entrada a la torre, de forma que puede ver la parte más alta de la misma reflejada en el espejo. ¿Cuánto mide la torre?

Los triángulos que forman la torre y el suelo y Martina y el suelo son semejantes ya que los ángulos son iguales.

Llamamos  $x$  a la altura de la torre.

Tras pasar todas las medidas a metros tenemos que:

$$\frac{x}{1,80} = \frac{6,40}{1,60} \rightarrow x = \frac{1,80 \cdot 6,40}{1,60} = 7,2$$

La torre mide 7,2 m.

6. Las longitudes de un triángulo escaleno son 6 cm, 8 cm y 9 cm. Halla las medidas de otro triángulo semejante sabiendo que la razón de semejanza entre sus perímetros es  $\frac{1}{6}$ .

La razón de semejanza entre los perímetros, al ser una longitud, es la misma que la de sus lados. Entonces, cada lado del primer triángulo es  $\frac{1}{6}$  de cada lado del segundo y, en consecuencia, cada lado del segundo será 6 veces cada lado del primero.

Por tanto, los lados miden 36 cm, 48 cm y 54 cm.

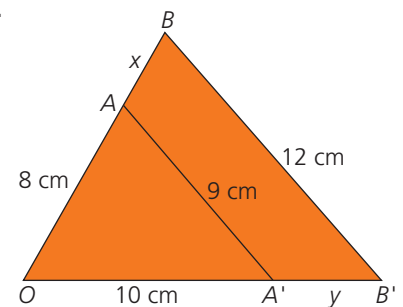
7. Determina la longitud de los lados desconocidos de estos triángulos.

El triángulo exterior  $OBB'$  es semejante al triángulo interior  $OAA'$  ya que sus ángulos son iguales y, por tanto, sus lados son proporcionales.

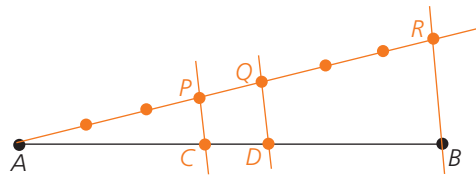
Hallamos los lados  $x$  e  $y$  aplicando el teorema de Tales.

$$\frac{8}{8+x} = \frac{9}{12} \rightarrow 8 \cdot 12 = 9(8+x) \rightarrow 96 = 72 + 9x \rightarrow x = \frac{96-72}{9} = 2,67 \text{ cm}$$

$$\frac{8}{10} = \frac{2,67}{y} \rightarrow y = \frac{2,67 \cdot 10}{8} = 3,34 \text{ cm}$$



8. Divide este segmento en tres partes proporcionales a 3, 4 y 7.



9. De una vivienda hemos obtenido las siguientes medidas:

Cocina: 4 m de largo y 2 m de ancho

Dormitorio: 4 m de largo y 3 m de ancho

Salón: 5 m de largo y 3 m de ancho

Halla las medidas que tendrán estas habitaciones en un plano hecho a escala 1:50.

La escala 1:50 significa que las medidas reales son 50 veces las medidas del plano, por lo que para calcularlas, simplemente dividiremos entre 50 cada una de las medidas.

Cocina:  $0,08 \text{ m} = 8 \text{ cm}$  de largo y  $0,04 \text{ m} = 4 \text{ cm}$  de ancho

Dormitorio:  $0,08 \text{ m} = 8 \text{ cm}$  de largo y  $0,06 \text{ m} = 6 \text{ cm}$  de ancho

Salón:  $0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$  de largo y  $0,06 \text{ m} = 6 \text{ cm}$  de ancho

10. Dos pueblos que en línea recta se encuentran a una distancia de 10 km, están separados en un mapa por 2 cm de distancia. ¿A qué escala está hecho dicho mapa?

Sabemos que 2 cm equivalen a 10 km.

Como la escala relaciona las distancias expresadas en la misma unidad de medida, pasamos las longitudes a la misma unidad de medida:  $10 \text{ km} = 1\,000\,000 \text{ cm}$

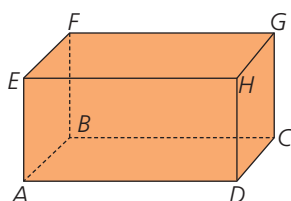
$$\text{Escala} = \frac{2}{1\,000\,000} = \frac{1}{500\,000} = 1:500\,000$$

Por tanto, 1 cm en la maqueta representa 500 000 cm en la realidad.

# GEOMETRÍA DEL ESPACIO

## Evaluación A

1. Indica las caras, vértices y aristas de esta figura. ¿Qué posición tienen entre sí las rectas que forman las aristas  $AB$  y  $EH$ ? ¿Y las caras  $ABCD$  y  $EFGH$ ?



Caras:  $ABCD$ ,  $EFGH$ ,  $AEFB$ ,  $DHGC$ ,  $AEHD$ ,  $BFGC$

Vértices:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$

Aristas:  $AD$ ,  $BC$ ,  $EH$ ,  $FG$ ,  $AB$ ,  $DC$ ,  $EF$ ,  $HG$ ,  $AE$ ,  $DH$ ,  $BF$ ,  $CG$

Las rectas  $AB$  y  $EH$  se cruzan. Las caras  $ABCD$  y  $EFGH$  son paralelas.

### Ten en cuenta

Las caras y las aristas las nombramos mediante los vértices que las forman.

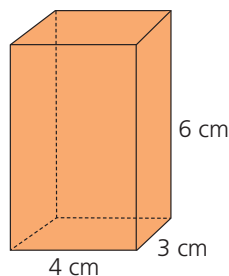
2. Halla el área total y el volumen de este prisma.

$$A_b = b \cdot h = 4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}^2$$

$$A_L = P \cdot h = 14 \cdot 6 = 84 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2A_b = 84 + 2 \cdot 12 = 108 \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h = 12 \cdot 6 = 72 \text{ cm}^3$$



### Recuerda

Área y volumen de prismas:

$$A_L = P \cdot h$$

$$A_T = A_L + 2A_b$$

$$V = A_b \cdot h$$

3. Calcula la diagonal de un cubo si el área total es  $150 \text{ m}^2$ .

En primer lugar, hallamos la medida del lado del cubo. El área del cubo es 6 veces el área de una cara.

$$A = 6 \cdot P = 150 \rightarrow P = \frac{150}{6} = 25 \rightarrow l = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Cada lado mide 5 cm. Aplicando el teorema de Pitágoras, hallamos la longitud de la diagonal de la base:  $d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow d^2 = 5^2 + 5^2 \rightarrow d^2 = 50 \rightarrow d = \sqrt{50} = 7,07 \text{ cm}$

Aplicamos de nuevo Pitágoras para hallar  $D$ :  $D^2 = d^2 + l^2 \rightarrow D^2 = 7,07^2 + 5^2 \rightarrow D^2 = 75 \rightarrow D = \sqrt{75} = 8,66 \text{ cm}$   
Por tanto, la diagonal del cubo mide 8,66 cm.

4. Halla el área total y el volumen de una pirámide regular pentagonal cuyo lado de la base mide 12 cm, la apotema de la base 8,26 cm y la apotema de la pirámide 16 cm.

$$A_b = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{12 \cdot 5 \cdot 8,26}{2} = 247,8 \text{ cm}^2$$

$$A_L = \frac{P \cdot A_p}{2} = \frac{12 \cdot 5 \cdot 16}{2} = 480 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_b + A_L = 247,8 + 480 = 727,8 \text{ cm}^2$$

Por tanto, el área total es de  $727,8 \text{ cm}^2$ .

$$h^2 = A_p^2 - a^2 = 16^2 - 8,26^2 = 187,77 \rightarrow h = \sqrt{187,77} = 13,7 \text{ cm}$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{247,8 \cdot 13,7}{3} = 1131,62 \text{ cm}^3$$

Por tanto, el volumen es de  $1131,62 \text{ cm}^3$ .

### Recuerda

Área y volumen de pirámides:

$$A_L = \frac{P \cdot A_p}{2}$$

$$A_T = A_L + A_b$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

5. Determina la altura de una pirámide de base cuadrada de lado 4 cm si sabemos que su volumen es  $96 \text{ cm}^3$ .

Si llamamos  $h$  a la altura, tenemos:  $V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{4^2 \cdot h}{3} = 96 \text{ cm}^3$

Resolviendo la ecuación:  $\frac{4^2 \cdot h}{3} = 96 \rightarrow h = \frac{96 \cdot 3}{16} = 18 \text{ cm}$

### Ten en cuenta

Sustituye los datos en la fórmula del volumen y resuelve la ecuación.

- 6.** Halla el área y el volumen de un cilindro de 6 cm de diámetro y 12 cm de altura.

Como el diámetro es 6 cm, el radio será de 3 cm.

Sustituyendo los datos en las fórmulas:

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 12 = 226,19 \text{ cm}^2$$

$$A_b = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 3^2 = 28,27 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2A_b = 226,19 + 2 \cdot 28,27 = 282,73 \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h = 28,27 \cdot 12 = 339,24 \text{ cm}^3$$

### Recuerda

Área total de un cilindro recto:

$$A_T = A_L + 2A_b = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

Volumen de un cilindro recto:

$$V = A_b \cdot h$$

- 7.** Calcula la altura de un cilindro sabiendo que su volumen es 502,4 m<sup>3</sup>, y su diámetro, 8 m.

Sustituyendo los datos en la fórmula del volumen y tomando el radio de 4 m, tenemos que:

$$V = A_b \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h \rightarrow 502,4 = \pi \cdot 4^2 \cdot h \rightarrow 502,4 = 50,24 \cdot h \rightarrow h = \frac{502,4}{50,24} = 10 \text{ m}$$

- 8.** Halla el área y el volumen de un cono de 5 cm de radio y 10 cm de altura.

Calculamos la generatriz del cono aplicando el teorema de Pitágoras con el radio y la altura.

$$g^2 = r^2 + h^2 = 5^2 + 10^2 = 125 \rightarrow g = \sqrt{125} = 11,18 \text{ cm}$$

Sustituyendo los datos en las fórmulas:

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 5 \cdot 11,18 = 175,62 \text{ cm}^2$$

$$A_b = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 5^2 = 78,54 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_b = 175,62 + 78,54 = 254,16 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{78,54 \cdot 10}{3} = 261,8 \text{ cm}^3$$

### Recuerda

Área total de un cono recto:

$$A_T = A_L + A_b = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$$

Volumen de un cono recto:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

- 9.** Queremos comprar tela para forrar una tienda de campaña de forma cónica de 4 m de diámetro y 4 m de altura. Si el metro cuadrado de tela cuesta 21 €, ¿cuánto gastaremos en la tienda?

Calculamos el área total de la tienda, ya que tanto la base como el lateral están forrados.

Hallamos la generatriz del cono mediante el teorema de Pitágoras con la altura y el radio (2 m).

$$g^2 = r^2 + h^2 = 2^2 + 4^2 = 20 \rightarrow g = \sqrt{20} = 4,47 \text{ m}$$

$$A_T = A_L + A_b = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 2 \cdot 4,47 + \pi \cdot 2^2 = 28,09 + 12,57 = 40,66 \text{ m}^2$$

Por tanto, gastaremos  $40,66 \cdot 21 = 853,86$  €.

- 10.** Halla el área y el volumen de una esfera de 10 cm de radio.

Sustituyendo los datos en las fórmulas:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 10^2 = 1256,64 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^3}{3} = 4188,79 \text{ cm}^3$$

### Recuerda

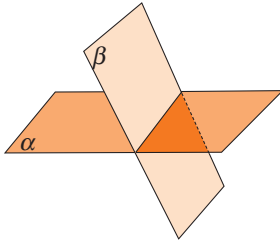
Área de una esfera:  $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

Volumen de una esfera:  $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$

# Evaluación B

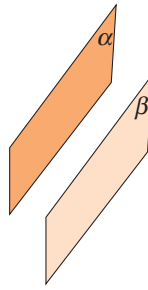
1. Determina la posición relativa entre los planos  $\alpha$  y  $\beta$ .

a)



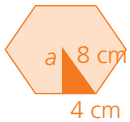
a) Los planos son secantes.

b)



b) Los planos son paralelos.

2. Halla el área total y el volumen de un prisma hexagonal regular cuyo lado de la base mide 8 cm y la altura 6 cm.



Calculamos la apotema de la base mediante el teorema de Pitágoras.

$$a^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48 \rightarrow a = \sqrt{48} = 6,93 \text{ cm}$$

$$A_b = A_{\text{HEXÁGONO}} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6,93}{2} = 124,74 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2A_b = 288 + 2 \cdot 124,74 = 537,48 \text{ cm}^2$$

**Recuerda**

En un hexágono regular, la longitud del radio es igual a la del lado.

$$A_L = P \cdot h = 6 \cdot 6 \cdot 8 = 288 \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h = 124,74 \cdot 8 = 997,92 \text{ cm}^3$$

3. ¿Cuál es el área total y el volumen de una pirámide hexagonal regular cuyo lado de la base mide 5 cm y la arista lateral 12 cm?

Calculamos la apotema de la base,  $a$ , la apotema de la pirámide,  $A_p$ , y la altura,  $h$ .

$$a^2 = 5^2 - 2,5^2 \rightarrow a^2 = 25 - 6,25 = 18,75 \rightarrow a = \sqrt{18,75} = 4,33 \text{ cm}$$

$$A_p^2 = 12^2 - 2,5^2 \rightarrow A_p^2 = 144 - 6,25 = 137,75 \rightarrow A_p = \sqrt{137,75} = 11,74 \text{ cm}$$

$$h^2 = 12^2 - 5^2 \rightarrow h^2 = 144 - 25 = 119 \rightarrow h = \sqrt{119} = 10,91 \text{ cm}$$

Ahora calculamos el área y el volumen.

$$A_b = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4,33}{2} = 64,95 \text{ cm}^2$$

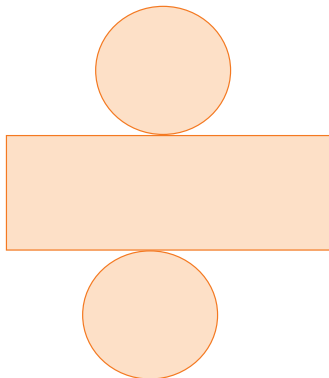
$$A_L = \frac{P \cdot A_p}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 11,74}{2} = 176,1 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_b + A_L = 64,95 + 176,1 = 241,05 \text{ cm}^2$$

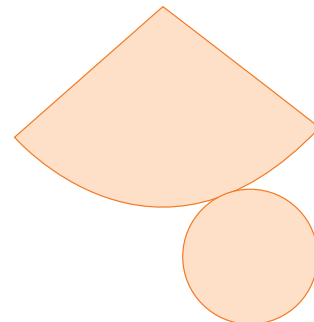
$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{64,95 \cdot 10,91}{3} = 236,2 \text{ cm}^3$$

4. Dibuja el desarrollo plano de un cilindro y de un cono.

Desarrollo plano de un cilindro

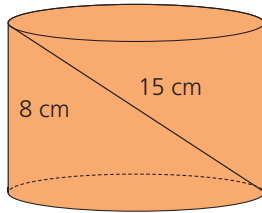


Desarrollo plano de un cono





5. Halla el área y el volumen de este cilindro.



Con los datos de la figura podemos calcular el diámetro mediante el teorema de Pitágoras.

$$15^2 = 8^2 + d^2 \rightarrow d^2 = 15^2 - 8^2 = 225 - 64 = 161 \rightarrow d = \sqrt{161} = 12,69 \text{ cm}$$

Por tanto, el radio mide  $12,69 : 2 = 6,35 \text{ cm}$ .

Sustituyendo los datos en las fórmulas tenemos:

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 6,35 \cdot 8 = 319,19 \text{ cm}^2 \quad A_b = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 6,35^2 = 126,68 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2A_b = 319,19 + 2 \cdot 126,68 = 572,55 \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h = 126,68 \cdot 8 = 1013,44 \text{ cm}^3$$

6. Calcula el radio de un cilindro sabiendo que su altura es 8 cm, y su volumen,  $628 \text{ cm}^3$ .

Sustituyendo los datos en la fórmula del volumen tenemos:  $V = A_b \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h \rightarrow$

$$\rightarrow 628 = \pi \cdot r^2 \cdot 8 \rightarrow 628 = 25,12 \cdot r^2 \rightarrow r^2 = \frac{628}{25,12} = 25 \rightarrow r = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

### Ten en cuenta

Sustituye los datos en la fórmula del volumen y resuelve la ecuación.

7. Halla el área y el volumen de un cono de 12 cm de altura y 15 cm de generatriz.

Calculamos el radio mediante el teorema de Pitágoras.

$$g^2 = r^2 + h^2 \rightarrow r^2 = g^2 - h^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81 \rightarrow r = \sqrt{81} = 9 \text{ cm}$$

Sustituyendo los datos en las fórmulas tenemos:

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 9 \cdot 15 = 424,12 \text{ cm}^2$$

$$A_b = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 9^2 = 254,47 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_b = 424,12 + 254,47 = 678,59 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{254,47 \cdot 12}{3} = 1017,88 \text{ cm}^3$$

8. Calcula la cantidad de galleta que contiene un cucurucho de 6 cm de diámetro y 15 cm de altura, y la cantidad de helado que podemos introducir en su interior.

La cantidad de galleta que contiene el cucurucho es el área lateral del cono, y la cantidad de helado que podemos introducir, es su volumen.

Calculamos la generatriz mediante el teorema de Pitágoras.

$$g^2 = r^2 + h^2 = 3^2 + 15^2 = 234 \rightarrow g = \sqrt{234} = 15,3 \text{ cm}$$

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 3 \cdot 15,3 = 144,2 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 15}{3} = 141,37 \text{ cm}^3$$

El cucurucho contiene  $144,2 \text{ cm}^2$  de galleta y podemos introducir  $141,37 \text{ cm}^3$  de helado.

9. Halla la distancia entre dos puntos  $A$  y  $B$  de la superficie esférica si el radio de la esfera mide 10 cm y el ángulo que forman con el centro de la esfera es de  $60^\circ$ .

Para calcular la distancia entre estos dos puntos utilizamos la longitud de un arco de circunferencia.

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} = 10,47 \text{ cm}$$

### Recuerda

Longitud de un arco de circunferencia:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

10. Determina la distancia entre los puntos  $A(30^\circ \text{ E}, 50^\circ \text{ N})$  y  $B(30^\circ \text{ E}, 70^\circ \text{ N})$ , situados en el mismo meridiano.

La amplitud del arco entre  $A$  y  $B$  es:  $70^\circ - 50^\circ = 20^\circ$

Para hallar la distancia entre  $A$  y  $B$ , calculamos la longitud del arco correspondiente al sector circular de  $20^\circ$  de amplitud y cuyo radio es aproximadamente el radio de la Tierra ( $6371 \text{ km}$ ).

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 2 \cdot \pi \cdot 6371 \cdot \frac{20^\circ}{360^\circ} = 2223,9 \text{ km}$$

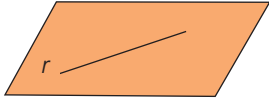
### Ten en cuenta

Utiliza la fórmula de la longitud del arco sabiendo que el radio de la Tierra es  $6371 \text{ km}$ .

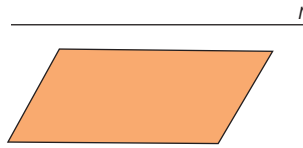
# Evaluación C

1. Determina la posición relativa de estas rectas y planos.

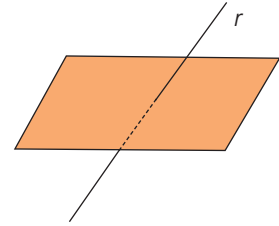
a)



b)



c)



a) Recta contenida en el plano.

b) Recta y plano paralelos.

c) Recta y plano secantes.

2. Halla el área total y el volumen de un prisma de 7 cm de altura cuyas bases son triángulos equiláteros de 5 cm de lado.

Para hallar el área de las bases, tenemos en cuenta el triángulo rectángulo que corresponde a la mitad de cada base. Mediante el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 5^2 - 2,5^2 = 25 - 6,25 = 18,75 \rightarrow h = \sqrt{18,75} = 4,33 \text{ cm}$$

$$A_b = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 4,33}{2} = 10,83 \text{ cm}^2$$

$$A_L = P \cdot h = 5 \cdot 3 \cdot 7 = 105 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2A_b = 105 + 2 \cdot 10,83 = 126,66 \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h = 10,83 \cdot 7 = 75,81 \text{ cm}^3$$

3. Calcula la cantidad de acero que se necesita para construir un cubo de 10 m de arista sin tapa.

Para calcular la cantidad de acero tenemos que calcular el área las 5 caras que tenemos que cubrir.

$$A = 5 \cdot l^2 = 5 \cdot 10^2 = 500 \text{ m}^2$$

Necesitamos 500 m<sup>2</sup> de acero.

4. Averigua la altura de un ortoedro cuya base mide 80 cm de largo y 50 cm de ancho sabiendo que en él se pueden introducir hasta 360 L de agua.

Sabemos que 1 L = 1 dm<sup>3</sup>. Por tanto, 360 L de agua equivalen a un volumen de 360 dm<sup>3</sup>, o lo que es lo mismo, 360 000 cm<sup>3</sup>. Hallamos qué altura corresponde a un volumen de 360 000 cm<sup>3</sup>.

$$V = a \cdot b \cdot h = 80 \cdot 50 \cdot h = 360\,000 \rightarrow 4000 \cdot h = 360\,000 \rightarrow h = \frac{360\,000}{4000} = 90 \text{ cm}$$

5. Calcula el área total y el volumen de una pirámide de altura 4 cm cuya base es un hexágono regular de lado 8 cm.

En primer lugar vamos a calcular la apotema de la base,  $a$ , y la apotema de la pirámide,  $A_p$ , mediante el teorema de Pitágoras.

$$a^2 = 8^2 - 4^2 \rightarrow a^2 = 64 - 16 = 48 \rightarrow a = \sqrt{48} = 6,93 \text{ cm}$$

$$A_p^2 = 4^2 + 6,93^2 \rightarrow A_p^2 = 16 + 48 = 64 \rightarrow A_p = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$

Ahora, calculamos el área y el volumen.

$$A_b = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 6,93}{2} = 166,32 \text{ cm}^2$$

$$A_L = \frac{P \cdot A_p}{2} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 8}{2} = 192 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_b + A_L = 166,32 + 192 = 358,32 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{166,32 \cdot 4}{3} = 221,76 \text{ cm}^3$$

- 6.** Halla el área y el volumen de un cilindro de 8 cm de diámetro y 15 cm de altura.

Al ser el diámetro 8 cm, el radio será 4 cm.

Sustituyendo los datos en las fórmulas tenemos:

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 15 = 376,99 \text{ cm}^2$$

$$A_b = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 4^2 = 50,27 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2A_b = 376,99 + 2 \cdot 50,27 = 477,53 \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h = 50,27 \cdot 15 = 754,05 \text{ cm}^3$$

- 7.** Determina la cantidad de pared que quedará pintada al dar una vuelta completa a un rodillo de 10 cm de diámetro y 30 cm de altura.

La cantidad de pared que se pinta es igual al área lateral del cilindro. Por tanto:

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 30 = 942,48 \text{ cm}^2$$

Quedarán pintados 942,48 cm<sup>2</sup> de pared.

- 8.** Calcula el área y el volumen de un cono de 8 cm de diámetro y 10 cm de generatriz.

Calculamos la altura del cono mediante el teorema de Pitágoras con el radio y la generatriz.

$$h^2 = g^2 - r^2 = 10^2 - 4^2 = 84 \rightarrow h = \sqrt{84} = 9,17 \text{ cm}$$

Sustituyendo los datos en las fórmulas tenemos:

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 4 \cdot 10 = 125,66 \text{ cm}^2$$

$$A_b = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 4^2 = 50,27 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_b = 125,66 + 50,27 = 175,93 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{50,27 \cdot 9,17}{3} = 153,66 \text{ cm}^3$$

- 9.** Halla la generatriz de un cono de radio 8 m sabiendo que su volumen es de 1 004,8 m<sup>3</sup>.

Primero calculamos la altura sustituyendo en la fórmula del volumen del cono.

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \rightarrow 1004,8 = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot h}{3} \rightarrow h = \frac{1004,8 \cdot 3}{\pi \cdot 8^2} = 15 \text{ m}$$

Ahora calculamos la generatriz mediante el teorema de Pitágoras con el radio y la altura.

$$g^2 = h^2 + r^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289 \rightarrow g = \sqrt{289} = 17 \text{ m}$$

- 10.** Calcula el área y el volumen de una esfera de 18 cm de diámetro.

Como el diámetro es 18 cm, el radio es 9 cm. Sustituyendo los datos en las fórmulas tenemos:

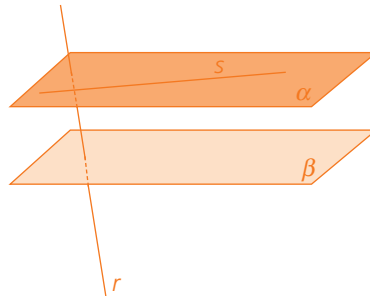
$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 9^2 = 1017,88 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 9^3}{3} = 3053,63 \text{ cm}^3$$

# Evaluación D

1. Dibuja dos planos paralelos, una recta secante a ellos, y otra recta que esté contenida en uno de los planos y se cruce con la anterior.

Respuesta abierta.



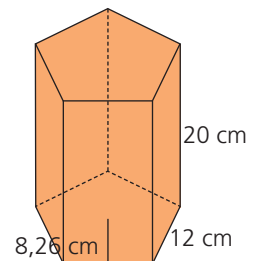
2. Halla el área y el volumen de este prisma pentagonal regular.

$$A_b = A_{\text{PENTAGONO}} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{12 \cdot 5 \cdot 8,26}{2} = 247,8 \text{ cm}^2$$

$$A_L = P \cdot h = 12 \cdot 5 \cdot 20 = 1200 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2A_b = 1200 + 2 \cdot 247,8 = 1695,6 \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h = 247,8 \cdot 20 = 4956 \text{ cm}^3$$



3. Calcula los litros de agua que caben en un prisma hexagonal de 7 cm de lado y 10 cm de altura.

Para calcular los litros de agua que caben, calculamos el volumen del prisma.

Necesitamos calcular la apotema de la base. Lo hacemos mediante el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = 7^2 - 3,5^2 = 49 - 12,25 = 36,75 \rightarrow a = \sqrt{36,75} = 6,06 \text{ cm}$$

$$\text{Por tanto, el volumen es: } V = A_b \cdot h = \frac{P \cdot a}{2} \cdot h = \frac{6 \cdot 7 \cdot 6,06}{2} \cdot 10 = 1272,6 \text{ cm}^3 = 1272,6 \text{ ml} = 1,2726 \text{ L}$$

Caben 1,2726 L.

4. Halla el área total y el volumen de una pirámide de base cuadrada de 4 cm de lado cuya altura es 10 cm.

En primer lugar, calculamos la apotema de la pirámide,  $A_p$ , mediante el teorema de Pitágoras, tomando como catetos la altura y la mitad de la base.

$$A_p^2 = 10^2 + 2^2 = 100 + 4 = 104 \rightarrow A_p = \sqrt{104} = 10,2 \text{ cm}$$

Después, calculamos el área y el volumen.

$$A_b = l^2 = 4^2 = 16 \text{ cm}^2 \qquad A_L = \frac{P \cdot A_p}{2} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 10,2}{2} = 81,6 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_b + A_L = 16 + 81,6 = 97,6 \text{ cm}^2 \qquad V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{16 \cdot 10}{3} = 53,33 \text{ cm}^3$$

5. Halla el volumen de la pirámide de Keops en Egipto, si sabemos que tiene una base cuadrada de 230 m de lado y una altura de 146 m.

Para hallar este volumen simplemente aplicamos la fórmula, ya que tenemos todos los datos.

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{230^2 \cdot 146}{3} = 2574466,67 \text{ m}^3$$

- 6.** Halla el área y el volumen de un cilindro de 4 cm de radio cuya diagonal mide 12 cm.

Calculamos la altura del cilindro aplicando el teorema de Pitágoras con la diagonal y el diámetro (8 cm).

$$h^2 = 12^2 - 8^2 = 144 - 64 = 80 \rightarrow h = \sqrt{80} = 8,94 \text{ cm}$$

Sustituyendo los datos en las fórmulas tenemos:

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 8,94 = 224,69 \text{ cm}^2$$

$$A_b = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 4^2 = 50,27 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_b = 224,69 + 2 \cdot 50,27 = 325,23 \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h = 50,27 \cdot 8,94 = 449,41 \text{ cm}^3$$

- 7.** Determina la altura de un cono de 10 cm de diámetro cuya generatriz mide 13 cm.

Hallamos la altura aplicando el teorema de Pitágoras, teniendo en cuenta que el radio mide 5 cm.

$$h^2 = g^2 - r^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \rightarrow h = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

- 8.** Calcula el diámetro de un cono de 9 cm de altura cuyo volumen es 1 139,82 cm<sup>3</sup>.

Sustituimos los datos en la fórmula del volumen de un cono.

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \rightarrow 1\,139,82 = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 9}{3} \rightarrow 1\,139,82 = 3 \cdot \pi \cdot r^2 \rightarrow r^2 = \frac{1\,139,82}{3 \cdot \pi} = 121 \rightarrow r = \sqrt{121} = 11 \text{ cm}$$

Por tanto, el diámetro mide 22 cm.

- 9.** El volumen de una esfera es 3 052,08 dm<sup>3</sup>. Halla su diámetro.

En primer lugar, calculamos el radio sustituyendo en la fórmula del volumen de la esfera.

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = 3\,052,08 \rightarrow r^3 = \frac{3\,052,08 \cdot 3}{4 \cdot \pi} = 729 \rightarrow r = \sqrt[3]{729} = 9 \text{ dm}$$

Por tanto, el diámetro mide 18 dm.

- 10.** Halla la distancia entre dos ciudades cuyas coordenadas geográficas son (20° E, 40° N) y (20° E, 20° S).

Para hallar esta distancia, calculamos la longitud del arco que hay entre estos dos puntos ya que al estar en un mismo meridiano pertenecen al mismo círculo máximo. El ángulo entre ellos es 60° y el radio es el radio de la Tierra (6 371 km).

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 2 \cdot \pi \cdot 6\,371 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} = 6\,671,7 \text{ km}$$

# FUNCIONES

## Evaluación A

1. Escribe la expresión algebraica que corresponde.

- a) La función que asocia a cada número su cuarta parte.  
 b) La función que asocia a cada número el cubo de su doble.  
 c) La función que asocia a cada número su anterior.  
 d) La función que asocia a cada número el cuadrado de su mitad.

a)  $f(x) = \frac{x}{4}$

b)  $f(x) = (2x)^3$

c)  $f(x) = x - 1$

d)  $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2$

2. Estudia si las siguientes tablas se corresponden con una función y, en ese caso, escribe la expresión algebraica correspondiente.

a)

x	1	2	3	4	5
y	3	6	9	12	15

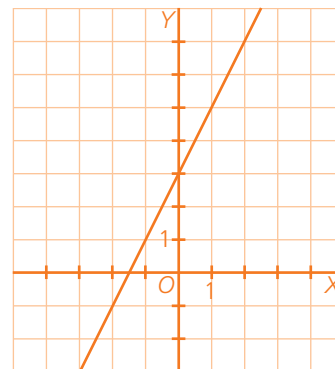
b)

x	1	2	3	3	4
y	2	3	4	5	6

- a) Sí es función porque a cada valor de  $x$  le corresponde un único valor de  $y$ .  
 La expresión algebraica es:  $y = 3x$   
 b) No es función porque el valor  $x = 3$  tiene dos imágenes (dos valores de  $y$ ).

3. Completa la tabla de valores de la función  $f(x) = 2x + 3$  y represéntala gráficamente.

x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	-3	-1	1	3	5	7



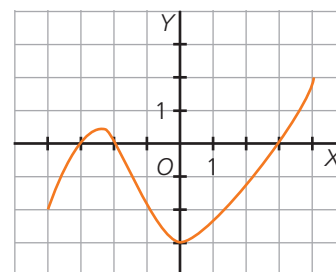
4. Halla el dominio, el recorrido y los puntos de corte de esta función.

Dominio:  $[-4, 4]$

Recorrido:  $[-3, 2]$

Puntos de corte eje X:  $(-3, 0)$ ,  $(-2, 0)$ ,  $(3, 0)$

Puntos de corte eje Y:  $(0, -3)$



5. ¿Cuál es el dominio de las siguientes funciones?

a)  $f(x) = x^2 + 3x - 6$     b)  $g(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}$     c)  $h(x) = \sqrt{x - 2}$

- a) Dom  $f$ :  $\mathbb{R}$   
 b) Dom  $g$ :  $\mathbb{R} - \{-1\}$   
 c) Dom  $h$ :  $[2, +\infty)$

### Recuerda

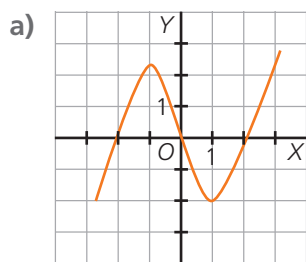
Una relación es una función si a cada valor de  $x$  le corresponde un único valor de  $y$ .

### Ten en cuenta

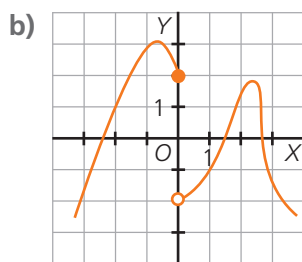
Imágenes de algunas funciones:

- Polinomios:  $\mathbb{R}$
- Fracciones algebraicas:  $\mathbb{R} - \{\text{valores que hacen 0 el denominador}\}$
- Raíces cuadradas: valores para los cuales el radicando  $\geq 0$

6. Indica si las funciones representadas son continuas. En el caso de no serlo, indica los puntos de discontinuidad.



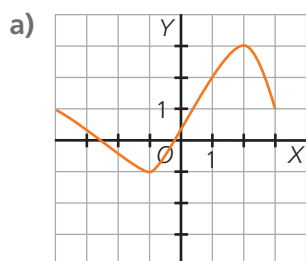
a) Es continua.



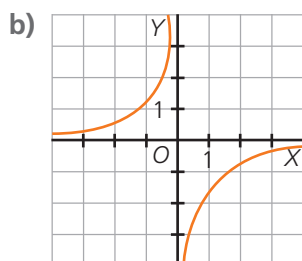
b) Es discontinua. Punto de discontinuidad en  $x = 0$ .

**Ten en cuenta**  
Los puntos de discontinuidad los indicaremos dando solo el valor de  $x$ .

7. Describe la monotonía, los máximos y los mínimos de las siguientes funciones.



a) Decreciente en  $(-4, -1)$  y  $(2, 3)$  y creciente en  $(-1, 2)$ . Mínimo  $(-1, -1)$  y máximo  $(2, 3)$ .



b) Creciente en todos los puntos menos en  $x = 0$ . No tiene mínimos ni máximos.

**Ten en cuenta**  
Indicaremos la monotonía mediante intervalos del eje  $X$ , y los máximos y los mínimos, mediante sus coordenadas.

8. Estudia la simetría de estas funciones.

a)  $f(x) = x^2 + 3x^4$

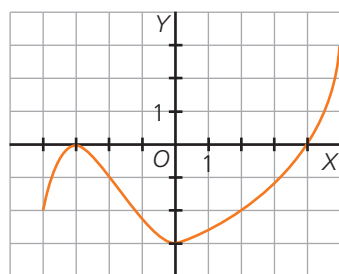
b)  $f(x) = 3x^3 - 2x$

a)  $f(-x) = (-x)^2 + 3(-x)^4 = x^2 + 3x^4 = f(x) \rightarrow$  Simetría par

b)  $f(-x) = 3(-x)^3 - 2(-x) = -3x^3 + 2x = -f(x) \rightarrow$  Simetría impar

**Recuerda**  
■  $f(-x) = f(x) \rightarrow$  Simetría par  
■  $f(-x) = -f(x) \rightarrow$  Simetría impar

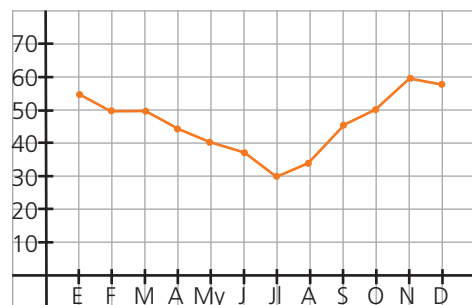
9. Dada la siguiente gráfica, describe todas sus características.



Dominio:  $[-4, 5]$ ; Recorrido:  $[-3, 3]$   
Puntos de corte:  $(-3, 0)$ ,  $(0, -3)$ ,  $(4, 0)$   
La función es continua.  
Creciente en  $(-4, -3)$  y  $(0, 5)$ .  
Decreciente en  $(-3, 0)$ .  
Máximo  $(-3, 0)$ , Mínimo  $(0, -3)$ .  
No es simétrica ni periódica.

**Ten en cuenta**  
Las características de una función son: dominio, recorrido, puntos de corte, continuidad, monotonía, máximos y mínimos, simetría y periodicidad.

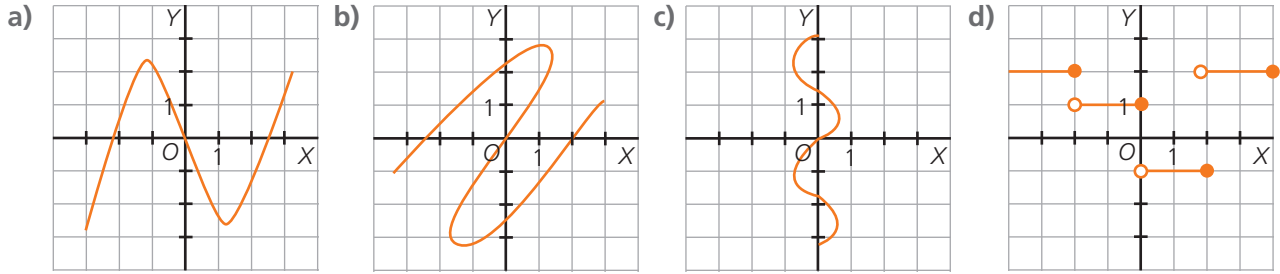
10. Esta gráfica indica la evolución de la factura de electricidad de una familia española. Lee y responde.



- a) ¿En qué mes el gasto fue menor? ¿Cuál fue este gasto?  
b) ¿Cuál fue el gasto en octubre? ¿Hubo algún otro mes con el mismo gasto que octubre?  
c) ¿En algún momento se mantuvo el gasto durante dos meses consecutivos?
- a) El gasto fue menor en julio. El gasto fue 30 €.  
b) El gasto en octubre fue de 50 €. Sí, febrero y marzo.  
c) Sí, en febrero y marzo.

# Evaluación B

1. Indica si las siguientes gráficas representan una función.



- a) Sí es función.      b) No es función.      c) No es función.      d) Sí es función.

2. Halla la imagen de  $x = 3$  para estas funciones.

a)  $f(x) = x^2 - 1$

b)  $f(x) = 3x^2 - 5x + 3$

a)  $f(3) = 3^2 - 1 = 8$

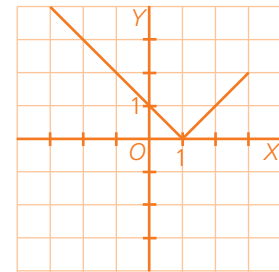
b)  $f(3) = 3 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 3 = 27 - 15 + 3 = 15$

### Recuerda

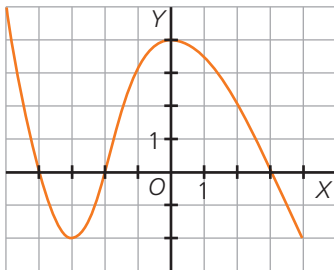
La imagen de un valor  $a$  en una función  $f(x)$  es el valor numérico  $f(a)$ .

3. Completa la tabla de valores de la función  $f(x) = |x - 1|$  y represéntala gráficamente.

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4	3	2	1	0	1	2



4. Halla el dominio, el recorrido y los puntos de corte de esta función.



Dominio:  $[-5, 4]$

Recorrido:  $[-2, 4]$

Puntos de corte eje X:  $(-4, 0), (-2, 0), (3, 0)$

Puntos de corte eje Y:  $(0, 4)$

5. Halla los puntos de corte de las siguientes funciones.

a)  $f(x) = x^2 + 5x + 6$

b)  $f(x) = 3x^2 + 2x$

a) Puntos de corte con el eje X:

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -3 \end{cases} \rightarrow (-2, 0), (-3, 0)$$

Puntos de corte eje Y:  $f(0) = 0^2 + 5 \cdot 0 + 6 = 6 \rightarrow (0, 6)$

b) Puntos de corte eje X:  $3x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(3x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 3x + 2 = 0 \rightarrow x_2 = -\frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow (0, 0), \left(-\frac{2}{3}, 0\right)$

Puntos de corte eje Y:  $(0, 0)$ , pues han salido ya al calcular los puntos de corte con el eje X.

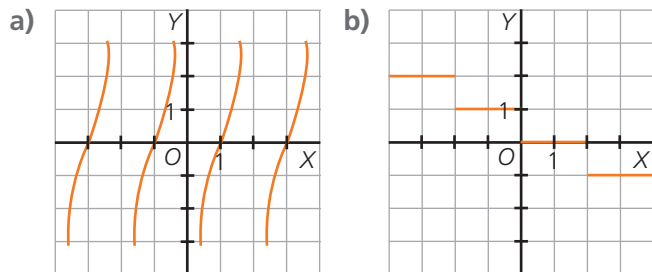
### Recuerda

■ Puntos de corte eje X:  $f(x) = 0$

■ Puntos de corte eje Y:  $f(0)$



6. Indica si las siguientes funciones son periódicas y, en caso de serlo, indica el período.

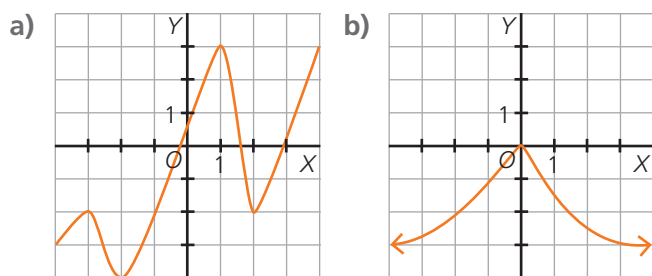


**Recuerda**

Una función es periódica de período  $t$  cuando el comportamiento de la función se repite cada  $t$  unidades.

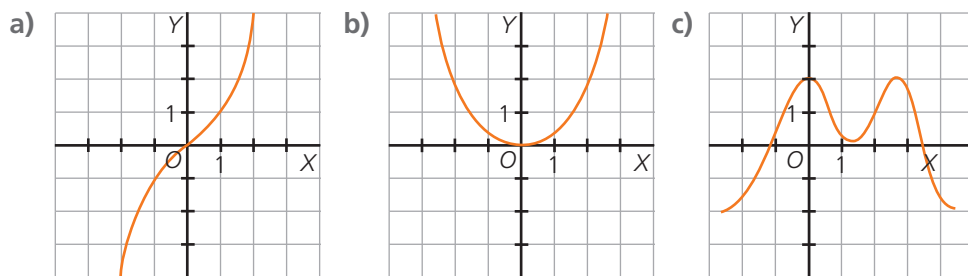
- a) Es periódica de período 2.  
 b) No es periódica.

7. Indica la monotonía, los máximos y los mínimos de las siguientes funciones.



- a) Creciente en  $(-4, -3)$ ,  $(-2, 1)$  y  $(2, 4)$ .  
 Decreciente en  $(-3, -2)$  y  $(1, 2)$ .  
 Máximos en  $(-3, -2)$  y  $(1, 3)$ .  
 Mínimos en  $(-2, -4)$  y  $(2, -2)$ .  
 b) Creciente en  $(-\infty, 0)$ .  
 Decreciente en  $(0, \infty)$ .  
 Máximo en  $(0, 0)$ .  
 No tiene mínimos.

8. Estudia la simetría de estas funciones.



- a) Simetría impar.      b) Simetría par.      c) No tiene simetría.

**Ten en cuenta**

- **Simetría par:** el eje de simetría es el eje Y.
- **Simetría impar:** el eje de simetría es el origen de coordenadas  $(0, 0)$ .

9. Indica el tipo de simetría que tienen estas funciones.

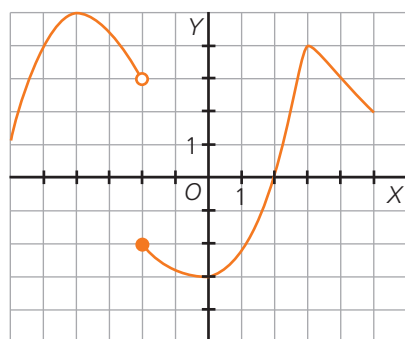
a)  $f(x) = \frac{2x}{3x + x^3}$

b)  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

a)  $f(-x) = \frac{2 \cdot (-x)}{3 \cdot (-x) + (-x)^3} = \frac{2x}{-3x - x^3} = -\frac{2x}{3x + x^3} = -f(x) \rightarrow$  Simetría impar

b)  $f(-x) = (-x)^4 - 2 \cdot (-x)^2 + 3 = x^4 - 2x^2 + 3 = f(x) \rightarrow$  Simetría par

10. Describe todas las características de esta gráfica.



- Dominio:  $[-6, 5]$ ; Recorrido:  $[-3, 5]$   
 Puntos de corte:  $(0, -3)$ ,  $(2, 0)$   
 La función es discontinua en  $x = -2$ .  
 Creciente en  $(-6, -4)$  y  $(0, 3)$ .  
 Decreciente en  $(-4, -2)$ ,  $(-2, 0)$  y  $(3, 5)$ .  
 Máximo en  $(-4, 5)$  y  $(3, 4)$ ; Mínimo en  $(0, -3)$ .  
 No es simétrica ni periódica.

# Evaluación C

1. Expresa las siguientes relaciones mediante una expresión algebraica.

- a) A cada número se le asocia con su triple más dos.
- b) A cada número se le asocia con su cuadrado menos una unidad.
- c) A cada número se le asocia con el cubo de su opuesto.
- d) A cada número se le asocia con el inverso de su doble.

a)  $f(x) = 3x + 2$                       b)  $f(x) = x^2 - 1$                       c)  $f(x) = (-x)^3$                       d)  $f(x) = \frac{1}{2x}$

2. Halla el valor de a en cada caso.

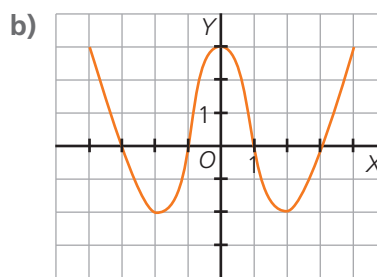
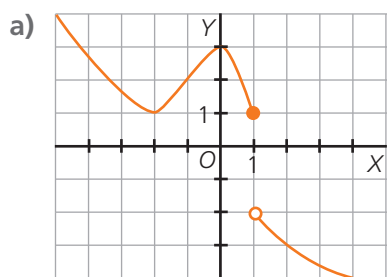
- a) La imagen de a mediante la función  $f(x) = 3x - 2$  es -5.
- b) La imagen de a mediante la función  $f(x) = -x^2 - 2$  es -2.

a) Sustituyendo en la expresión algebraica:  $f(a) = -5 \rightarrow 3a - 2 = -5 \rightarrow 3a = -3 \rightarrow a = -1$   
 b) Sustituyendo en la expresión algebraica:  $f(a) = -2 \rightarrow -a^2 - 2 = -2 \rightarrow -a^2 = 0 \rightarrow a^2 = 0 \rightarrow a = 0$

3. Indica razonadamente si las siguientes relaciones se corresponden con una función.

- a) A cada número se le asigna su anterior y su posterior.
  - b) A cada kilo de carne se le asigna un precio de venta.
  - c) A cada persona se le asigna su número de calzado.
  - d) A cada número natural se le asignan sus dos raíces cuadradas.
- a) No es función, ya que a cada número se le asignan dos valores distintos.  
 b) Sí es función, ya que cada kilo de carne tiene un único precio.  
 c) Sí es función, ya que cada persona tiene un único número de calzado.  
 d) No es función, ya que a cada número natural se le asignan dos valores distintos: uno positivo y otro negativo.

4. Indica el dominio, el recorrido y los puntos de corte de estas funciones.



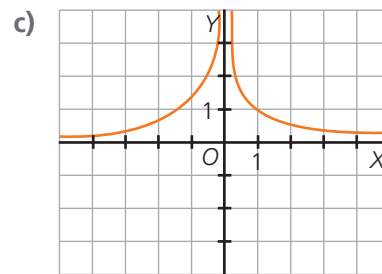
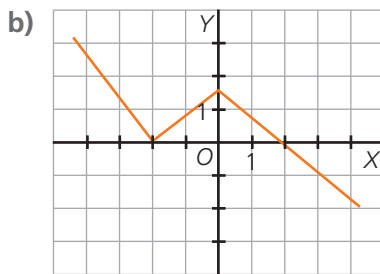
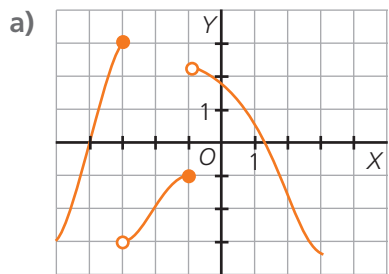
- a) Dominio:  $[-5, 4]$ ; Recorrido:  $[-2, 3] \cup [1, 4]$ ; Puntos de corte eje X: no tiene; Puntos de corte eje Y:  $(0, 3)$   
 b) Dominio:  $[-4, 4]$ ; Recorrido:  $[-2, 3]$ ; Puntos de corte eje X:  $(-3, 0), (-1, 0), (1, 0), (3, 0)$ ; Puntos de corte eje Y:  $(0, 3)$

5. Halla el dominio de las siguientes funciones.

a)  $f(x) = \frac{4x^2 - x}{5}$                       b)  $g(x) = \frac{-1}{x^2 + 1}$                       c)  $h(x) = \sqrt{-2x + 3}$

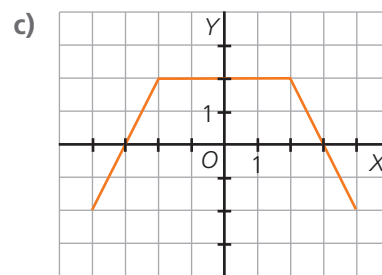
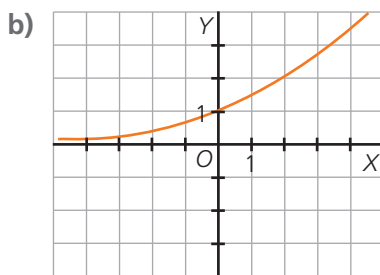
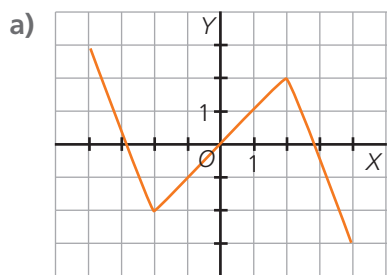
- a) Dom  $f$ :  $\mathbb{R}$ , ya que el denominador nunca puede ser 0.
- b) Dom  $g$ :  $\mathbb{R}$  ya que la ecuación  $x^2 + 1 = 0$  no tiene solución.
- c) Dom  $h$ :  $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$ , pues en este intervalo  $-2x + 3 \geq 0$ .

6. Indica si las funciones representadas son continuas. Si no lo son, indica los puntos de discontinuidad.



a) Es discontinua en  $x = -3$  y  $x = -1$ . b) Es continua. c) Es discontinua en  $x = 0$ .

7. Describe la monotonía, los máximos y los mínimos de estas funciones.



a) Creciente en  $(-2, 2)$ ; Decreciente en  $(-4, -2)$  y  $(2, 4)$ ; Máximo  $(2, 2)$ ; Mínimo  $(-2, -2)$ .  
 b) Creciente en todos los puntos; No tiene máximos ni mínimos.  
 c) Creciente en  $(-4, -2)$ ; Constante en  $(-2, 2)$ ; Decreciente en  $(2, 4)$ ; No tiene máximos ni mínimos.

8. Estudia la simetría de las siguientes funciones dadas en expresión algebraica.

a)  $f(x) = x^2 - 2x + 3$

b)  $f(x) = \frac{x^2 - 5}{3x^4}$

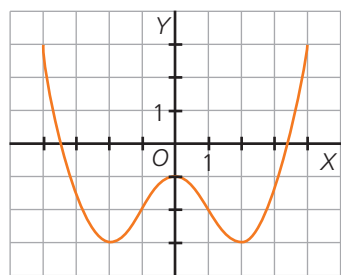
a)  $f(-x) = (-x)^2 - 2 \cdot (-x) + 3 = x^2 + 2x + 3$

b)  $f(-x) = \frac{(-x)^2 - 5}{3 \cdot (-x)^4} = \frac{x^2 - 5}{3x^4} = f(x)$

No es simétrica.

Simetría par.

9. Dada la siguiente gráfica describe todas sus características.



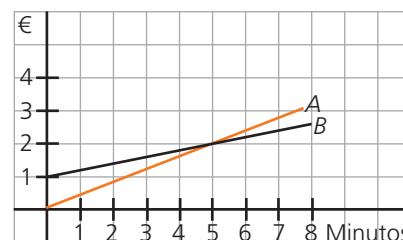
Dominio:  $[-4, 4]$ ; Recorrido:  $[-3, 3]$   
 Puntos de corte:  $(-3, 5; 0)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(3, 5; 0)$   
 La función es continua.  
 Creciente en  $(-2, 0)$  y  $(2, 4)$ .  
 Decreciente en  $(-4, -2)$  y  $(0, 2)$ .  
 Máximo:  $(0, -1)$ ; Mínimos:  $(-2, -3)$  y  $(2, -3)$ .  
 Es simétrica par. No es periódica.

10. En la gráfica se observan las tarifas de dos compañías telefónicas según los minutos de llamada.

- a) ¿Cuál es la tarifa de cada compañía?  
 b) Resume qué compañía elegirías para realizar una llamada en función de los minutos que vayas a hablar.

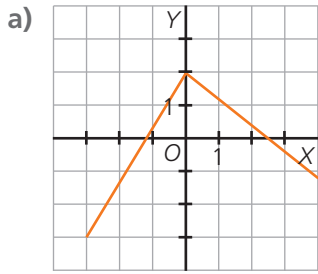
a) La compañía A cobra 0,40 € por minuto de llamada, pero no cobra establecimiento de llamada. La compañía B cobra 1 € por establecimiento de llamada y 0,20 € por minuto.

b) Para llamadas de menos de 5 min es más barata la compañía A; para llamadas de 5 min el precio es el mismo; a partir de 5 min, es más barata la compañía B.

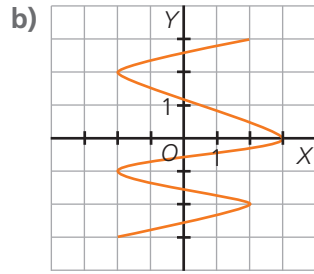


# Evaluación D

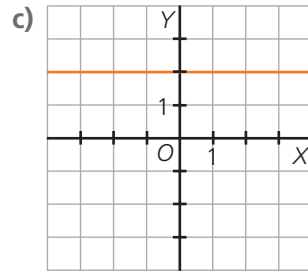
1. ¿Representan estas gráficas una función?



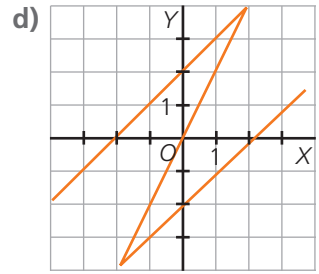
a) Sí es función.



b) No es función.



c) Sí es función.



d) No es función.

2. Halla la imagen de  $x = -2$  para estas funciones.

a)  $f(x) = -2x^2 - 5x + 3$

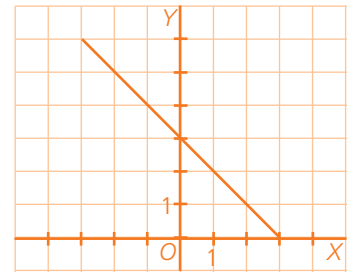
a)  $f(-2) = -2 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 3 = 5$

b)  $f(x) = \frac{6}{x-1}$

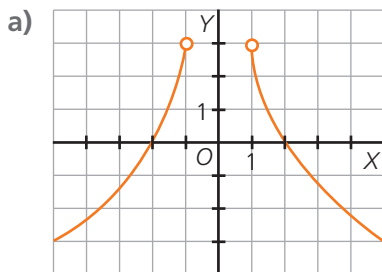
b)  $f(-2) = \frac{6}{-2-1} = -2$

3. Completa la tabla de valores de la función  $f(x) = -x + 3$  y represéntala gráficamente.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	6	5	4	3	2	1	0

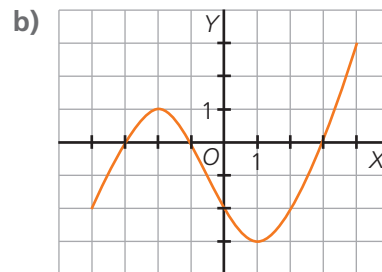


4. Indica el dominio, el recorrido y los puntos de corte de las siguientes funciones.



a) Dominio:  $[-5, -1) \cup (1, 5]$ ; Recorrido:  $[-3, 3]$

Puntos de corte eje X:  $(-2, 0)$  y  $(2, 0)$ ; Puntos de corte eje Y: no tiene.



b) Dominio:  $[-4, 4]$ ; Recorrido:  $[-3, 3]$

Puntos de corte eje X:  $(-3, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(3, 0)$ ; Puntos de corte eje Y:  $(0, -2)$

5. Halla los puntos de corte de las siguientes funciones.

a)  $f(x) = -2x$

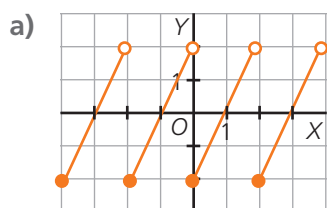
a) Puntos de corte con el eje X:  $-2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ . Como también pertenece al eje Y, el punto  $(0, 0)$  es el único punto de corte de la función con los ejes.

b)  $f(x) = 4x^2 + 9$

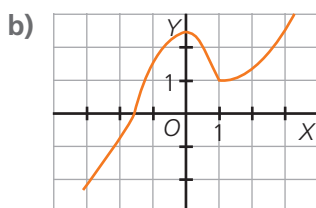
b) Puntos de corte con el eje X:  $4x^2 + 9 = 0$ . Esta ecuación no tiene solución por lo que la función no tiene puntos de corte en el eje X.

Puntos de corte con el eje Y:  $f(0) = 4 \cdot 0^2 + 9 = 9 \rightarrow$  El punto de corte es  $(0, 9)$ .

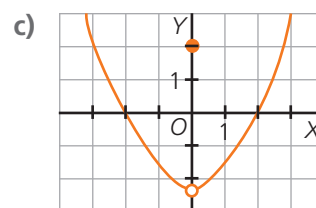
6. Indica si estas funciones son continuas y si son periódicas. Si no son continuas, indica los puntos de discontinuidad.



a) Es discontinua en  $x = -2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$  y  $x = 4$ . Es periódica de período 2.

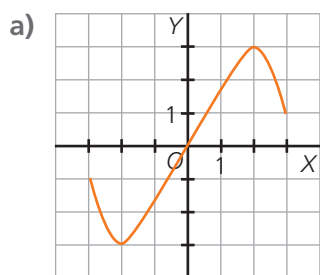


b) Es continua y no periódica.

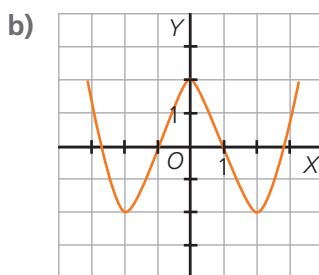


c) Es discontinua en  $x = 0$  y no periódica.

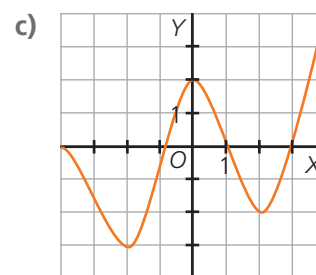
7. Estudia la simetría de estas funciones.



a) Simetría impar



b) Simetría par



c) No es simétrica

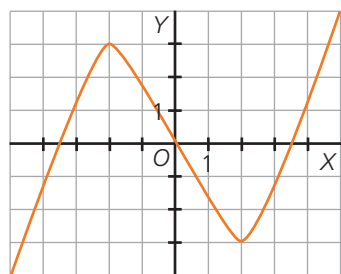
8. Halla el valor de  $k$  para que la función  $f(x) = 3x^4 + kx^3 + 2x^2 + 6$  tenga simetría par.

Para que la función tenga simetría par se tiene que cumplir que  $f(-x) = f(x)$ .

$$f(-x) = 3 \cdot (-x)^4 + k \cdot (-x)^3 + 2 \cdot (-x)^2 + 6 = 3x^4 - kx^3 + 2x^2 + 6$$

$$\text{Igualando las dos expresiones: } 3x^4 - kx^3 + 2x^2 + 6 = 3x^4 + kx^3 + 2x^2 + 6 \rightarrow -kx^3 = kx^3 \rightarrow -2kx^3 = 0 \rightarrow k = 0$$

9. Dada la siguiente gráfica, describe todas sus características.



Dominio:  $[-5, 5]$ ; Recorrido:  $[-3, 3]$

Puntos de corte:  $(-3, 5)$ ;  $(0, 0)$ ,  $(3, 5)$ ;  $(0)$

La función es continua.

Creciente en  $(-5, -2)$  y  $(2, 5)$ .

Decreciente en  $(-2, 2)$ .

Máximo  $(-2, 3)$ ; Mínimo  $(2, -3)$

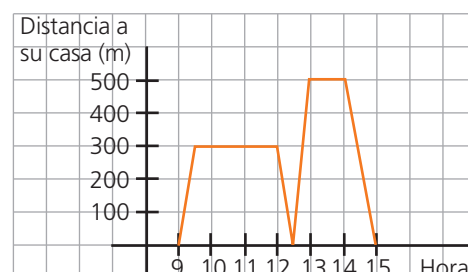
Simétrica impar. No periódica.

10. Álvaro sale de casa a las 9 de la mañana. Va paseando al parque y un rato después vuelve a casa, coge dinero y sale corriendo hacia el cine. Después, vuelve a casa.

a) ¿A qué distancia está el parque de la casa de Álvaro? ¿Cuánto tarda en llegar? ¿Cuánto tiempo estuvo en el parque?

b) ¿A qué distancia está el cine de su casa? ¿A qué hora llegó?

c) ¿Cuánto tardó Álvaro en llegar a su casa después del cine? ¿A qué hora llegó?



a) El parque está a 300 m. Tarda en llegar media hora y allí está 2 horas y media.

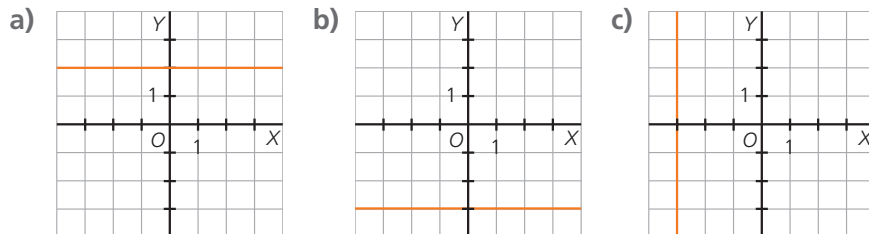
b) El cine está a 500 m. Llegó a las 13:00.

c) Tardó una hora. Llegó a las 15:00.

# FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

## Evaluación A

1. Escribe la expresión algebraica de estas gráficas. ¿Cuáles no se corresponden con una función?



a)  $y = 2$                       b)  $y = -3$                       c) No es función.

**Recuerda**  
La función constante tiene como expresión algebraica  $y = n$ .

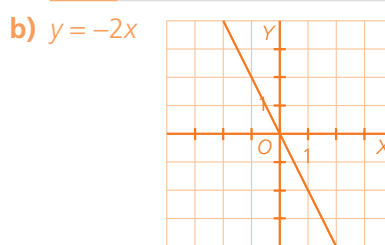
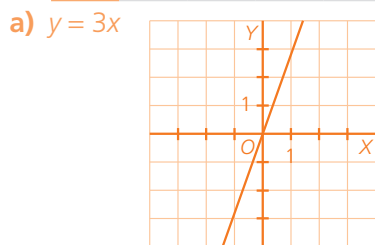
2. Representa gráficamente las funciones de proporcionalidad directa dadas por las siguientes tablas. Indica la expresión algebraica que corresponde en cada caso.

a)

x	0	1	-1	2
y	0	3	-3	6

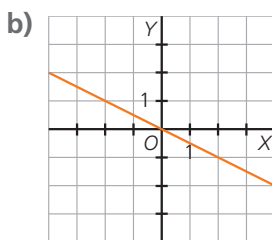
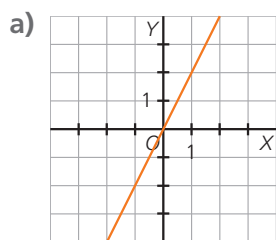
b)

x	-2	-1	0	2
y	4	2	0	-4



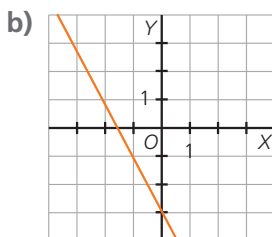
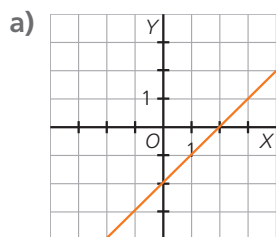
**Recuerda**  
La función de proporcionalidad directa tiene como ecuación  $y = mx$  donde  $m$  es la pendiente.

3. Halla la ecuación de estas gráficas, indica su pendiente y si son crecientes o decrecientes.



a)  $y = 2x$ ;  $m = 2$ ; Creciente  
b)  $y = -\frac{1}{2}x$ ;  $m = -\frac{1}{2}$ ; Decreciente

4. Determina la ecuación de estas gráficas, indica su pendiente y su ordenada en el origen.



a)  $y = x - 2$   
 $m = 1$ ;  $n = -2$   
b)  $y = -2x - 3$   
 $m = -2$ ;  $n = -3$

**Recuerda**  
Una función lineal tiene como ecuación  $y = mx + n$  donde  $m$  es la pendiente y  $n$  la ordenada en el origen.

5. Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2, 3) si su pendiente es -2.

La recta es de la forma  $y = mx + n$ . Como  $m = -2$ , la recta es  $y = -2x + n$ . Calculamos  $n$  sustituyendo el punto (2, 3) en la ecuación anterior:  $3 = -2 \cdot 2 + n \rightarrow n = 7$ . Luego  $y = -2x + 7$ .

6. Halla la ecuación punto-pendiente y la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto  $A(-1, 4)$  cuya pendiente es 2.

La ecuación punto-pendiente es:  $y - 4 = 2(x + 1)$

Hallamos la ecuación explícita desarrollando la ecuación anterior y despejando.

$$y - 4 = 2(x + 1) \rightarrow y - 4 = 2x + 2 \rightarrow y = 2x + 6$$

7. Dada la recta  $\frac{x-2}{3-2} = \frac{y-3}{1-3}$ , escribe la ecuación explícita, la punto-pendiente y la general.

Ecuación punto-pendiente:  $\frac{x-2}{3-2} = \frac{y-3}{1-3} \rightarrow x-2 = \frac{y-3}{-2} \rightarrow y-3 = -2(x-2)$

Ecuación explícita:  $y-3 = -2(x-2) \rightarrow y-3 = -2x+4 \rightarrow y = -2x+7$

Ecuación implícita:  $y = -2x+7 \rightarrow 2x+y-7=0$

### Recuerda

Ecuación punto-pendiente:

$$y - a_2 = m(x - a_1)$$

Ecuación explícita:

$$y = mx + n$$

### Recuerda

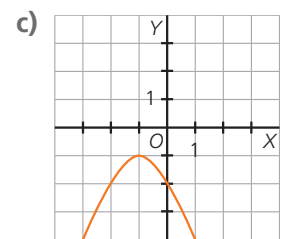
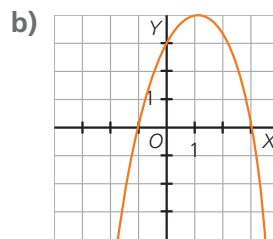
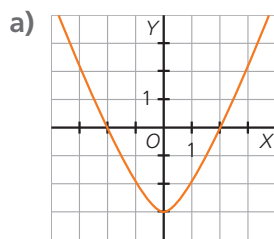
Ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2}$$

Ecuación general o implícita:

$$Ax + By + C = 0$$

8. Observa las gráficas y determina el vértice, el eje de simetría y los puntos de corte con los ejes.



a) Vértice:  $(0, -3)$ . Eje de simetría:  $x = 0$ . Puntos de corte con los ejes:  $(-2, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, -3)$

b) Vértice:  $(1, 4)$ . Eje de simetría:  $x = 1$ . Puntos de corte con los ejes:  $(-1, 0)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(0, 3)$

c) Vértice:  $(-1, -1)$ . Eje de simetría:  $x = -1$ . Puntos de corte con los ejes:  $(0, -2)$

9. Indica los elementos característicos de la función  $f(x) = x^2 - 5x + 4$  y represéntala gráficamente.

Como  $a = 1 > 0$ , la parábola tiene las ramas abiertas hacia arriba.

$$\left. \begin{aligned} \text{Vértice: } -\frac{b}{2a} &= -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2} \\ f\left(\frac{5}{2}\right) &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 4 = -\frac{9}{4} \end{aligned} \right\} \rightarrow V\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$

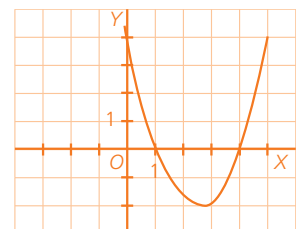
Eje de simetría:  $x = \frac{5}{2}$

Puntos de corte con el eje X:  $x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases} \rightarrow (1, 0) \text{ y } (4, 0)$

Puntos de corte con el eje Y:  $f(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 4 = 4 \rightarrow (0, 4)$

### Recuerda

- La abscisa del vértice es  $-\frac{b}{2a}$ .
- El eje de simetría es  $x = -\frac{b}{2a}$ .



10. En una tienda hacen un descuento del 20%. Escribe las ecuaciones de las funciones que expresan el descuento y el precio a pagar según el precio del artículo. ¿Qué tipo de funciones son?

Si llamamos  $x$  al precio del artículo y  $f(x)$  al descuento, la ecuación que expresa el descuento es  $f(x) = 0,20x$ , y la que expresa el precio a pagar,  $f(x) = 0,80x$ .

Son funciones de proporcionalidad directa.

# Evaluación B

1. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $A(-2, 3)$  y  $B(5, 3)$ .

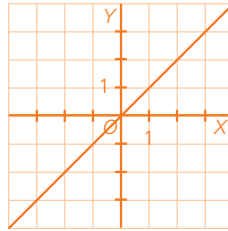
Como la ordenada de los puntos es la misma, 3, la ecuación es constante:  $y = 3$

2. Escribe y representa las ecuaciones de las rectas que pasan por:

a) El origen y el punto  $(2, 3)$ .

a) Al pasar por el origen es una función de proporcionalidad directa de la forma  $y = mx$ .

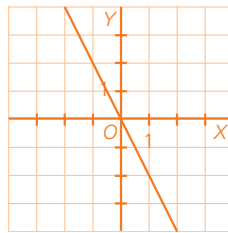
$$m = \frac{3 - 0}{2 - 0} = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2}x$$



b) El origen y el punto  $(-1, 3)$ .

b) Al pasar por el origen es una función de proporcionalidad directa de la forma  $y = mx$ .

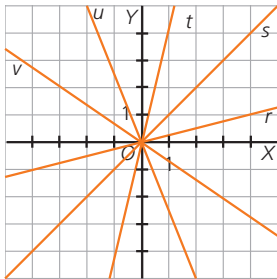
$$m = \frac{3 - 0}{-1 - 0} = \frac{3}{-1} = -3 \rightarrow y = -3x$$



## Recuerda

Dados dos puntos  $A(a_1, a_2)$  y  $B(b_1, b_2)$ , la pendiente de la recta que pasa por ellos es  $m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$ .

3. Determina la expresión algebraica de cada una de estas funciones de proporcionalidad directa.



r:  $y = \frac{1}{4}x$

u:  $y = -\frac{5}{2}x$

s:  $y = x$

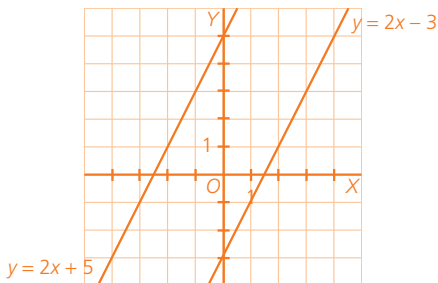
v:  $y = -\frac{2}{3}x$

t:  $y = 4x$

## Ten en cuenta

Para hallar la pendiente, busca dos puntos de la misma recta y divide la variación que hay entre ellos en el eje Y por la variación que hay en el eje X.

4. Representa las funciones lineales  $y = 2x - 3$  e  $y = 2x + 5$  en un mismo eje de coordenadas. ¿Cómo son las rectas? ¿Cómo son sus pendientes?



Las rectas son paralelas, por lo que las pendientes son iguales.

5. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $A(1, -2)$  y  $B(3, -10)$ .

La recta es de la forma  $y = mx + n$ . En primer lugar hallamos la pendiente:  $m = \frac{-10 - (-2)}{3 - 1} = \frac{-8}{2} = -4$

Luego la recta es de la forma:  $y = -4x + n$

Sustituimos el punto  $(1, -2)$  en la ecuación para hallar  $n$ :  $-2 = -4 \cdot 1 + n \rightarrow n = 2$

Entonces, la ecuación de la recta es  $y = -4x + 2$ .



6. Halla la recta que pasa por los puntos  $A(1, 3)$  y  $B(3, -1)$  y escríbela en forma implícita.

La ecuación de la recta que pasa por esos puntos es:  $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-3}{-1-3}$

Simplificamos y multiplicamos en cruz para hallar la forma general de la recta.

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-3}{-1-3} \rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4} \rightarrow -4(x-1) = 2(y-3) \rightarrow -4x+4 = 2y-6 \rightarrow -4x-2y+10=0$$

7. Indica la pendiente de estas rectas.

a)  $3x + 2y - 5 = 0$

b)  $\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+4}{5+4}$

c)  $y + 2 = 3(x - 1)$

d)  $y = -2x - 5$

a)  $3x + 2y - 5 = 0 \rightarrow 2y = -3x + 5 \rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \rightarrow$  La pendiente es  $m = \frac{3}{2}$ .

b)  $\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+4}{5+4} \rightarrow x-2 = \frac{y+4}{9} \rightarrow y+4 = 9(x-2) \rightarrow$  La pendiente es  $m = 9$ .

c) La ecuación ya está expresada en forma punto-pendiente, luego  $m = 3$ .

d) La ecuación está dada de forma explícita, por lo que  $m = -2$ .

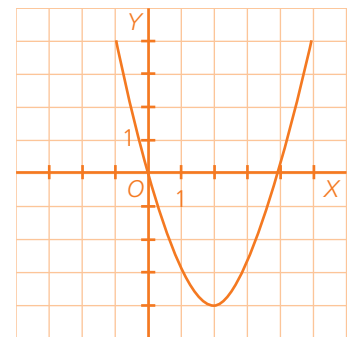
8. Representa la función cuadrática  $f(x) = x^2 - 4x$  hallando sus elementos característicos.

Como  $a = 1 > 0$ , la parábola tiene las ramas abiertas hacia arriba.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Vértice: } -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2 \\ f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4 \end{array} \right\} \rightarrow V(2, -4) \quad \text{Eje de simetría: } x = 2$$

Puntos de corte con el eje X:  $x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x - 4) = 0 \rightarrow (0, 0)$  y  $(4, 0)$

Puntos de corte con el eje Y:  $f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 = 0 \rightarrow (0, 0)$



9. Se lanza una pelota que sigue una trayectoria parabólica dada por  $f(x) = -2x^2 + 16x$ , donde  $x$  son los metros recorridos y  $f(x)$  la altura que alcanza en metros. Indica la altura máxima a la que llega la pelota.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Calculamos el vértice: } -\frac{b}{2a} = -\frac{16}{2 \cdot (-2)} = 4 \\ f(4) = -2 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4 = 32 \end{array} \right\} \rightarrow V(4, 32)$$

Luego la altura máxima que alcanza son 32 m.

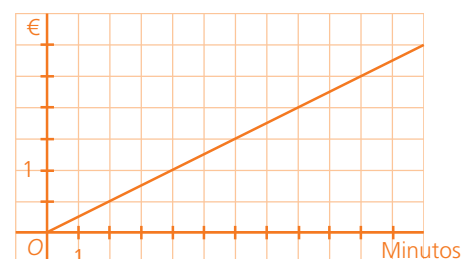
### Ten en cuenta

El máximo o el mínimo de una función cuadrática se encuentra en el vértice.

10. Una compañía telefónica cobra 25 CENT por cada minuto de llamada. Completa la tabla y representa gráficamente la función que representa el precio por minuto. ¿Qué tipo de función es?

Minutos	1	2	4	6	10
Precio (€)	0,25	0,50	1	1,50	2,50

Es una función de proporcionalidad directa.



# Evaluación C

1. Halla la ecuación de una función constante que pase por el punto  $A(3, -1)$ . Escribe la ecuación de una recta paralela a la anterior que pase por el punto  $B(2, 5)$ .

Para hallar la ecuación de la función constante, nos fijamos en segunda coordenada del punto. Entonces,  $y = -1$ .

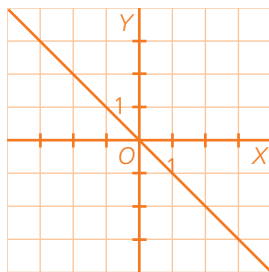
La recta paralela que pasa por el punto  $(2, 5)$  es  $y = 5$ .

2. Representa gráficamente las funciones dadas por las siguientes tablas. Indica la expresión algebraica que corresponde en cada caso.

a)

x	1	2	3	4
y	-1	-2	-3	-4

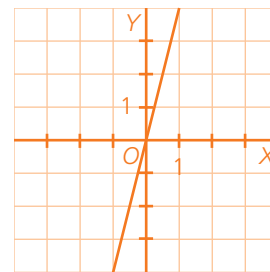
a)  $y = -x$



b)

x	-1	0	1	2
y	-4	0	4	8

b)  $y = 4x$



3. Determina la pendiente de las funciones de proporcionalidad directa que pasan por:

a) El punto  $(2, 5)$ .

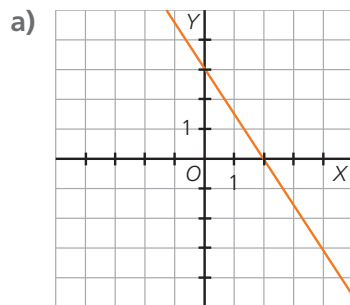
b) El punto  $(-1, 3)$ .

En ambos casos al ser funciones de proporcionalidad directa pasan por el  $(0, 0)$ .

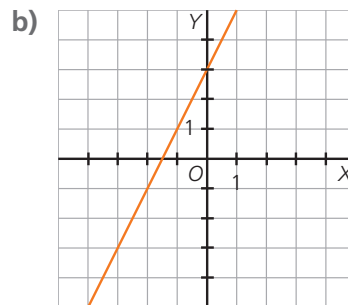
a)  $m = \frac{5 - 0}{2 - 0} = \frac{5}{2}$

b)  $m = \frac{3 - 0}{-1 - 0} = -3$

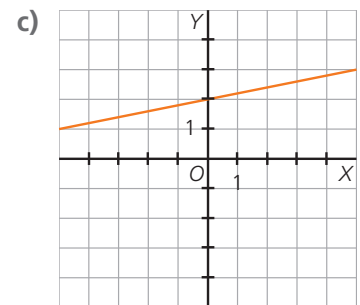
4. Escribe la expresión algebraica de las siguientes funciones lineales. ¿Cuál es la pendiente? ¿Y la ordenada en el origen?



a)  $y = -\frac{3}{2}x + 3; m = -\frac{3}{2}; n = 3$



b)  $y = 2x + 3; m = 2; n = 3$



c)  $y = \frac{1}{5}x + 2; m = \frac{1}{5}; n = 2$

5. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto  $A(1, -5)$  cuya pendiente es 3.

La recta es de la forma  $y = mx + n$ . Como  $m = 3$ , la recta es  $y = 3x + n$ .

Calculamos  $n$  sustituyendo el punto  $(1, -5)$  en la ecuación anterior:  $-5 = 3 \cdot 1 + n \rightarrow n = -8$

Luego la ecuación de la recta es:  $y = 3x - 8$

6. Escribe la recta que pasa por los puntos  $A(2, -1)$  y  $B(3, -4)$ , y escríbela en forma implícita.

La ecuación de la recta que pasa por esos puntos es:  $\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+1}{-4+1}$

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+1}{-4+1} \rightarrow x-2 = \frac{y+1}{-3} \rightarrow -3(x-2) = y+1 \rightarrow -3x+6 = y+1 \rightarrow -3x-y+5 = 0$$

7. Halla la ecuación de una recta paralela a  $y = 3x - 2$  que pase por el punto  $A(2, 5)$ .

Una recta paralela a ella tiene la misma pendiente; luego buscamos una recta de ecuación  $y = 3x + n$ .

Sustituimos el punto  $(2, 5)$  en la ecuación para hallar  $n$ :  $5 = 3 \cdot 2 + n \rightarrow 5 = 6 + n \rightarrow n = -1$

Entonces, la ecuación es:  $y = 3x - 1$

8. Representa la función cuadrática  $f(x) = -x^2 - 4x - 3$  hallando sus elementos característicos.

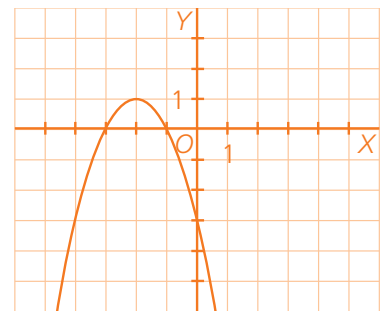
Como  $a = -1 < 0$ , la parábola tiene las ramas abiertas hacia abajo.

$$\left. \begin{aligned} \text{Vértice: } -\frac{b}{2a} &= -\frac{-4}{2 \cdot (-1)} = -2 \\ f(-2) &= -(-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 3 = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow V(-2, 1)$$

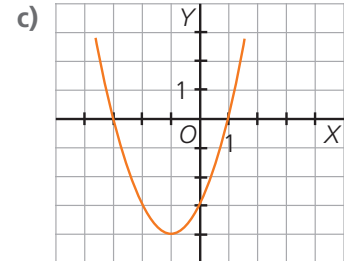
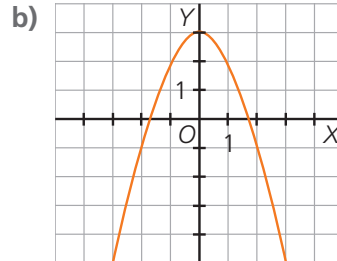
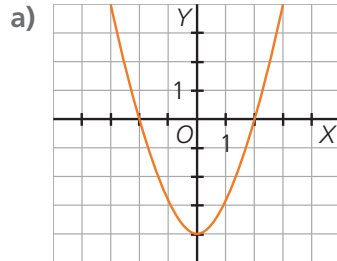
Eje de simetría:  $x = -2$

Puntos de corte con el eje X:  $-x^2 - 4x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = -3 \rightarrow (-1, 0)$  y  $(-3, 0)$

Puntos de corte con el eje Y:  $f(0) = -0^2 - 4 \cdot 0 - 3 = -3 \rightarrow (0, -3)$



9. Relaciona cada una de las siguientes gráficas con su ecuación correspondiente.



$f(x) = x^2 + 2x - 3$

$f(x) = x^2 - 4$

$f(x) = -x^2 + 3$

10. Dos gimnasios ofertan los siguientes precios:

GIMNASIO A: 40 € matrícula + 40 €/mes

GIMNASIO B: No se paga matrícula. 50 €/mes

- a) Indica la expresión que relaciona el número de meses y el precio en cada uno de los gimnasios.

- b) Realiza una tabla de valores para cada gimnasio con el precio para 6 meses y representa en unos mismos ejes de coordenadas las dos gráficas. ¿Qué opción sería más económica según el número de meses?

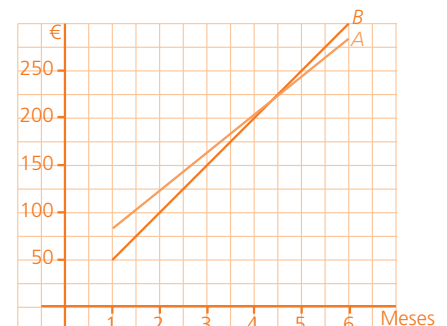
a) GIMNASIO A:  $y = 40x + 40$

GIMNASIO B:  $y = 50x$

b)

N.º meses	1	2	3	4	5	6
Precio A	80	120	160	200	240	280
Precio B	50	100	150	200	250	300

Para menos de 4 meses es más económico el gimnasio B; para 4 meses tendrían el mismo precio, y para más de 4 meses, sería más económico el gimnasio A.



# Evaluación D

1. Escribe las ecuaciones de los ejes de coordenadas. ¿Cuál de ellos podría representar una función y cuál no?

Eje X:  $y = 0$                       Eje Y:  $x = 0$

El eje X podría representar una función constante.

2. Clasifica estas funciones según sean constantes, de proporcionalidad directa o lineales.

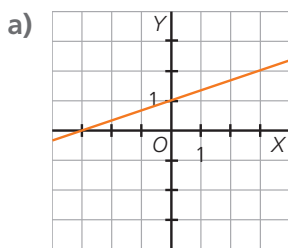
a)  $y = 0,25x$       b)  $y = -3x + 2$       c)  $y = 5$       d)  $y = 2x$       e)  $y = -1$       f)  $y = 4x - 1$

Constantes:  $y = 5, y = -1$

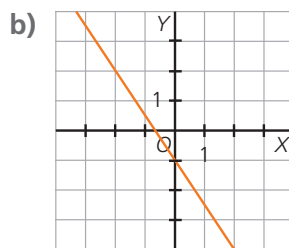
Lineales:  $y = -3x + 2, y = 4x - 1$

Proporcionalidad directa:  $y = 0,25x, y = 2x$

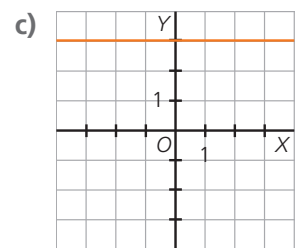
3. Halla la ecuación de las siguientes gráficas, indica su pendiente y si son crecientes o decrecientes.



a)  $y = \frac{1}{3}x + 1$   
 $m = \frac{1}{3}$ ; Creciente



b)  $y = -\frac{3}{2}x - 1$   
 $m = -\frac{3}{2}$ ; Decreciente



c)  $y = 3$   
 $m = 0$ ; Constante

4. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $A(-2, 3)$  y  $B(1, 6)$ . Escribe la ecuación de la recta paralela a ella que corta al eje Y en el punto  $C(0, -2)$ .

La recta que pasa por los puntos  $(-2, 3)$  y  $(1, 6)$  es de la forma  $y = mx + n$ .

La pendiente es  $m = \frac{6 - 3}{1 - (-2)} = \frac{3}{3} = 1$ , por lo que la recta es de la forma  $y = x + n$ .

Sustituimos el punto  $(-2, 3)$  en la ecuación para hallar  $n$ :  $3 = -2 + n \rightarrow n = 5$

Entonces la ecuación es:  $y = x + 5$

Una recta paralela a esta tiene pendiente 1 y, si corta al eje Y en el punto  $(0, -2)$ , la ordenada en el origen es  $-2$ . Luego la ecuación de la recta paralela es:  $y = x - 2$

5. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) Una función constante tiene pendiente 0.
  - b) Una función cuadrática puede no cortar a ninguno de los ejes de coordenadas.
  - c) En la ecuación de la recta  $y = mx + n$ ,  $m$  indica la pendiente y  $n$  la ordenada en el origen.
  - d) La recta dada de la forma  $Ax + By + C = 0$  se llama ecuación explícita.
- a) VERDADERO. Las funciones constantes ni crecen ni decrecen por lo que tienen pendiente 0.
  - b) FALSO. Puede no cortar al eje X pero siempre corta al eje Y.
  - c) VERDADERO. El coeficiente de  $x$  indica la pendiente, y el término independiente, la ordenada en el origen.
  - d) FALSO. Esa forma de la recta se llama ecuación implícita.

- 6.** Halla las ecuaciones punto-pendiente y explícita de la recta que pasan por  $A(1, 5)$  y  $B(-2, 3)$ .

La pendiente es  $m = \frac{3-5}{-2-1} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$ . Entonces, la ecuación punto-pendiente es:  $y - 5 = \frac{2}{3}(x - 1)$

La ecuación explícita es:  $y - 5 = \frac{2}{3}(x - 1) \rightarrow y - 5 = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$

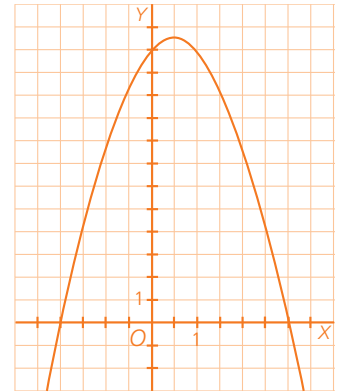
- 7.** Representa la función cuadrática  $f(x) = -2x^2 + 2x + 12$  hallando sus elementos característicos.

Como  $a = -2 < 0$ , la parábola tiene las ramas abiertas hacia abajo.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Vértice: } -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot (-2)} = \frac{1}{2} \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 12 = \frac{25}{2} \end{array} \right\} \rightarrow V\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{2}\right) \quad \text{Eje de simetría: } x = \frac{1}{2}$$

Puntos de corte con el eje X:  $-2x^2 + 2x + 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases} \rightarrow (3, 0) \text{ y } (-2, 0)$

Puntos de corte con el eje Y:  $f(0) = -2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 12 = 12 \rightarrow (0, 12)$



- 8.** Halla los puntos de corte de las funciones  $f(x) = x^2 + x - 1$  y  $g(x) = -x^2 + 9$ .

Igualamos las expresiones y resolvemos:  $x^2 + x - 1 = -x^2 + 9 \rightarrow 2x^2 + x - 10 = 0 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -\frac{5}{2}$

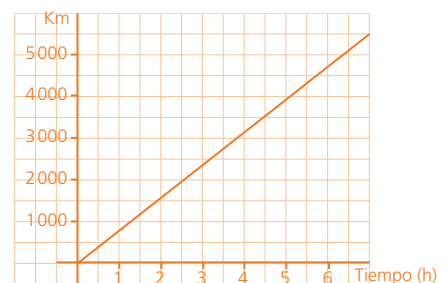
Sustituimos los valores en una de las expresiones:  $f(2) = 2^2 + 2 - 1 = 5$ ;  $f\left(-\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right) - 1 = \frac{11}{4}$

Por tanto, los puntos de corte son  $(2, 5)$  y  $\left(-\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right)$ .

- 9.** Un avión se desplaza a 800 km/h. Escribe y representa la ecuación de la función que relaciona el espacio recorrido y el tiempo empleado. ¿Qué tipo de función es?

Si llamamos  $x$  al tiempo empleado e  $y$  al espacio recorrido, la ecuación es  $y = 800x$ .

Es una función de proporcionalidad directa.



- 10.** Se lanza una pelota desde la ventana de un edificio siguiendo una trayectoria dada por la ecuación  $f(x) = -x^2 + 3x + 10$ , donde  $x$  representa el espacio recorrido e  $y$  la altura que alcanza en metros. ¿A qué altura se encuentra la ventana? ¿A qué distancia del edificio cae la pelota? ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

La ventana se encuentra a  $f(0) = -0^2 + 3 \cdot 0 + 10 = 10$  m de altura.

Hallamos el punto de corte con el eje X:  $-x^2 + 3x + 10 = 0 \rightarrow x_1 = 5, x_2 = -2 \rightarrow$  La pelota cae a 5 m.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Vértice: } -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = \frac{3}{2} \\ f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{2} + 10 = \frac{49}{4} = 12,25 \end{array} \right\} \rightarrow V\left(\frac{3}{2}, 12,25\right) \rightarrow \text{Alcanza } 12,25 \text{ m de altura.}$$

# ESTADÍSTICA

## Evaluación A

1. Clasifica estas variables estadísticas en cualitativas o cuantitativas y, en este último caso, indica si la variable es discreta o continua.

- a) La edad en años de una persona.
- b) Los ingresos mensuales de una familia.
- c) El color de ojos de una persona.
- d) El número de nacimientos en un mes en una ciudad.

- a) Cuantitativa discreta      c) Cualitativa
- b) Cuantitativa continua    d) Cuantitativa discreta

**Recuerda**

- **Variable cualitativa:** los datos son cualidades.
- **Variable cuantitativa:** los datos son números.
  - Discreta: solo puede tomar valores aislados.
  - Continua: puede tomar cualquier valor intermedio entre dos números dados.

2. En una clase de 30 alumnos se han obtenido los siguientes resultados en un examen de matemáticas. ¿Qué tipo de variable es? Realiza el recuento y construye una tabla.

8   5   3   6   6   5   2   8   7   5   8   2   4   5   7  
4   5   9   4   6   7   6   3   5   6   2   8   9   7   5

Es una variable cuantitativa discreta.

Nota	2	3	4	5	6	7	8	9
Recuento	3	2	3	7	5	4	4	2

3. Completa esta tabla de frecuencias a partir de los datos de la actividad anterior.

Nota ( $x_i$ )	$f_i$	$h_i$	$F_i$	$H_i$	%
2	3	0,1	3	0,1	10
3	2	0,07	5	0,17	7
4	3	0,1	8	0,27	10
5	7	0,23	15	0,5	23
6	5	0,17	20	0,67	17
7	4	0,13	24	0,8	13
8	4	0,13	28	0,93	13
9	2	0,07	30	1	7
Total	30	1			100

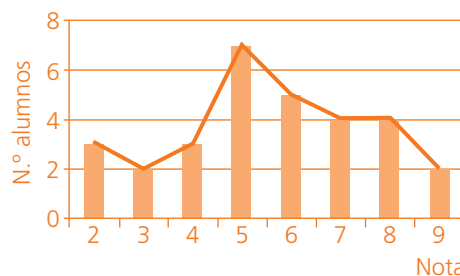
**Recuerda**

- Frecuencia absoluta ( $f_i$ ): número de veces que se repite cada dato.
- Frecuencia absoluta acumulada ( $F_i$ ):  

$$F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i$$
- Frecuencia relativa ( $h_i$ ):  $\frac{f_i}{N.º \text{ de datos}}$
- Frecuencia relativa acumulada ( $H_i$ ):  

$$H_i = h_1 + h_2 + \dots + h_i$$
- Porcentaje (%):  $h_i \cdot 100$

4. Representa los datos de la actividad 2 en un diagrama de barras y mediante un polígono de frecuencias.



5. Halla la media, la moda y la mediana de los datos anteriores.

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + x_4 \cdot f_4 + x_5 \cdot f_5 + x_6 \cdot f_6 + x_7 \cdot f_7 + x_8 \cdot f_8}{N}$$

$$= \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 9 \cdot 2}{30} = \frac{167}{30} = 5,57$$

Mo = 5 porque es el dato con mayor frecuencia absoluta.

Para calcular la mediana se halla la media aritmética de los dos datos centrales, que corresponden con las posiciones 15 y 16.

$$Me = \frac{7 + 4}{2} = 5,5$$

**Recuerda**

- **Media:**  

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_n \cdot f_n}{N}$$
- **Moda (Mo):** es el dato que tiene mayor frecuencia absoluta.
- **Mediana (Me):** es el valor que ocupa la posición central.

6. Calcula los cuartiles correspondientes a los datos de la actividad 2.

Nos fijamos en los datos de la tabla de la actividad 3.

El primer cuartil deja el 25 % de los datos a la izquierda por lo que, según la columna  $H_i$ , corresponde con la nota 4. Luego  $Q_1 = 4$ .

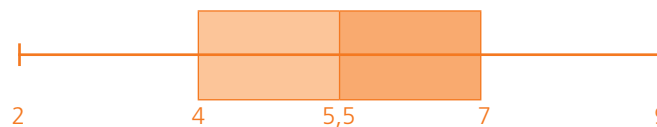
El segundo cuartil coincide con la mediana por lo que  $Q_2 = 5,5$ .

El tercer cuartil deja el 75 % de los datos a la izquierda por lo que, según la columna  $H_i$ , corresponde con la nota 7. Luego  $Q_3 = 7$ .

**Recuerda**

- $Q_1$  es el valor que deja a su izquierda el 25 % de los datos.
- $Q_2$  es el valor que deja a su izquierda el 50 % de los datos.
- $Q_3$  es el valor que deja a su izquierda el 75 % de los datos.

7. Representa los datos de la actividad anterior en un diagrama de caja y bigotes.



8. Calcula el rango, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación de los datos anteriores.

Partimos de la tabla de la actividad 3.

$$R = 9 - 2 = 7$$

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 \cdot f_1 + x_2^2 \cdot f_2 + x_3^2 \cdot f_3 + x_4^2 \cdot f_4 + x_5^2 \cdot f_5 + x_6^2 \cdot f_6 + x_7^2 \cdot f_7 + x_8^2 \cdot f_8}{N}$$

$$- \bar{x}^2 = \frac{2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 2 + 4^2 \cdot 3 + 5^2 \cdot 7 + 6^2 \cdot 5 + 7^2 \cdot 4 + 8^2 \cdot 4 + 9^2 \cdot 2}{30} - 5,57^2 = 3,88$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{3,88} = 1,97$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1,97}{5,57} = 0,35$$

**Recuerda**

- **Rango:**  

$$R = \text{dato mayor} - \text{dato menor}$$
- **Varianza:**  

$$\sigma^2 = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_n \cdot f_n}{N} - \bar{x}^2$$
- **Desviación típica:**  $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
- **Coefficiente de variación:**  $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$

9. La media de las cuatro notas de un alumno es 7,2. Calcula la cuarta nota si tres de ellas son 8,5; 6,9 y 6,6.

Llamamos x al valor de la cuarta nota y sustituimos en la fórmula de la media.

$$\frac{8,5 + 6,9 + 6,6 + x}{4} = 7,2 \rightarrow \frac{22 + x}{4} = 7,2 \rightarrow 22 + x = 28,8 \rightarrow x = 28,8 - 22 = 6,8$$

La cuarta nota del alumno es 6,8.

# Evaluación B

1. Clasifica estas variables estadísticas en cualitativas o cuantitativas y, en este último caso, indica si la variable es discreta o continua.

- a) Número de calzado de una persona. a) Cuantitativa discreta
- b) Color de pelo de una persona. b) Cualitativa
- c) Número de aprobados en una asignatura. c) Cuantitativa discreta

2. Estas son las alturas en centímetros de 25 jóvenes. ¿Qué tipo de variable es? Construye una tabla donde aparezcan los datos en intervalos de 5 cm, las marcas de clase y el recuento.

172 175 168 182 194 178 169 183 187 191 173 177 181  
184 166 181 184 173 175 178 189 187 179 185 178

Altura	Marca de clase	Recuento
[165, 170)	167,5	3
[170, 175)	172,5	3
[175, 180)	177,5	7
[180, 185)	182,5	6
[185, 190)	187,5	4
[190, 195)	192,5	2

**Recuerda**

La marca de clase es el punto medio de cada intervalo.

Es una variable cuantitativa continua.

3. Completa esta tabla de frecuencias a partir de los datos de la actividad anterior.

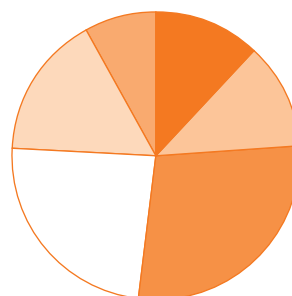
Altura	Marca de clase $x_i$	$f_i$	$h_i$	$F_i$	$H_i$	%
[165, 170)	167,5	3	0,12	3	0,12	12
[170, 175)	172,5	3	0,12	6	0,24	12
[175, 180)	177,5	7	0,28	13	0,52	28
[180, 185)	182,5	6	0,24	19	0,76	24
[185, 190)	187,5	4	0,16	23	0,92	16
[190, 195)	192,5	2	0,08	25	1	8
Total		25	1			100

4. Dibuja el diagrama de sectores correspondiente a los datos de la actividad 2.

Altura	Marca de clase $x_i$	$h_i$	Amplitud
[165, 170)	167,5	0,12	43,2°
[170, 175)	172,5	0,12	43,2°
[175, 180)	177,5	0,28	100,8°
[180, 185)	182,5	0,24	86,4°
[185, 190)	187,5	0,16	57,6°
[190, 195)	192,5	0,08	28,8°
Suma		1	360°

**Recuerda**

En un diagrama de sectores:  
Ángulo del sector circular =  $h_i \cdot 360^\circ$



- [165, 170)
- [170, 175)
- [175, 180)
- [180, 185)
- [185, 190)
- [190, 195)



**5. Halla la media, la moda y la mediana de los datos anteriores.**

Partimos de la tabla de la actividad 3 y utilizamos la marca de clase para calcular la media.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + x_4 \cdot f_4 + x_5 \cdot f_5 + x_6 \cdot f_6}{N} = \\ &= \frac{167,5 \cdot 3 + 172,5 \cdot 3 + 177,5 \cdot 7 + 182,5 \cdot 6 + 187,5 \cdot 4 + 192,5 \cdot 2}{25} = \\ &= \frac{4492,5}{25} = 179,7 \text{ cm} \end{aligned}$$

El intervalo modal es [175, 180). La moda es  $Mo = 177,5$ .

El intervalo mediano es [175, 180) ya que su frecuencia relativa acumulada es la primera que supera 0,5. La mediana es 177,5.

**Ten en cuenta**

En datos agrupados, la media se calcula con las marcas de clase.

La moda y la mediana se tomarán como la marca de clase del intervalo que las contenga.

**6. Calcula los cuartiles correspondientes a los datos de la actividad 2.**

Nos fijamos en los datos de la tabla de la actividad 3.

El primer cuartil deja el 25% de los datos a la izquierda por lo que, según la columna  $H_r$ , corresponde con el intervalo [175, 180). Luego  $Q_1 = 177,5$ .

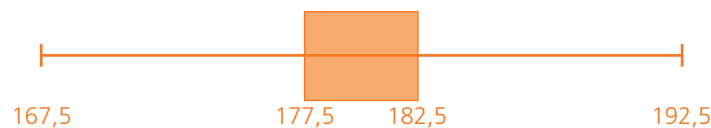
El segundo cuartil coincide con la mediana por lo que  $Q_2 = 177,5$ .

El tercer cuartil deja el 75% de los datos a la izquierda por lo que, según la columna  $H_r$ , corresponde con el intervalo [180, 185). Luego  $Q_3 = 182,5$ .

**Ten en cuenta**

En datos agrupados, tomamos las marcas de clase como aproximación de los cuartiles.

**7. Representa los datos de la actividad anterior en un diagrama de caja y bigotes.**



**8. Calcula el rango, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación de los datos anteriores.**

Partimos de la tabla de la actividad 3.  $R = 195 - 165 = 30$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{x_1^2 \cdot f_1 + x_2^2 \cdot f_2 + x_3^2 \cdot f_3 + x_4^2 \cdot f_4 + x_5^2 \cdot f_5 + x_6^2 \cdot f_6}{N} - \bar{x}^2 = \\ &= \frac{167,5^2 \cdot 3 + 172,5^2 \cdot 3 + 177,5^2 \cdot 7 + 182,5^2 \cdot 6 + 187,5^2 \cdot 4 + 192,5^2 \cdot 2}{25} - 179,7^2 = \\ &= \frac{808\,556,25}{25} - 32\,292,09 = 50,16 \end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{50,16} = 7,08 \quad CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{7,08}{179,7} = 0,04$$

**9. Responde razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.**

- a) La frecuencia relativa de una serie de datos es el número de veces que se repite un dato concreto.
  - b) Para representar datos agrupados se suele utilizar un histograma.
  - c) La suma de todas las frecuencias relativas es igual al número total de datos.
  - d) La desviación típica siempre es menor que la varianza.
- a) FALSO. El número de veces que se repite un dato concreto es la frecuencia absoluta.
  - b) VERDADERO. El histograma siempre se usa para datos agrupados.
  - c) FALSO. La suma de las frecuencias relativas es igual a 1, independientemente del número de datos.
  - d) FALSO. Si la varianza es menor que 1, la desviación típica es mayor que la varianza.

# Evaluación C

1. Clasifica estas variables estadísticas en cualitativas o cuantitativas y, en este último caso, indica si la variable es discreta o continua.

- a) Consumo de agua de una familia. a) Cuantitativa continua
- b) Comida favorita de las personas de un edificio. b) Cualitativa
- c) Número de llamadas de teléfono realizadas en un año. c) Cuantitativa discreta

2. Al preguntar a 40 alumnos sobre el número de horas diarias de estudio, hemos conseguido los siguientes resultados. ¿Qué tipo de variable es? Realiza el recuento y exprésalo mediante una tabla.

3   2   3   1   4   2   3   4   5   1  
 2   0   3   4   3   0   5   1   2   3  
 3   4   3   4   2   3   4   2   0   2  
 2   3   4   4   5   0   1   1   3   2

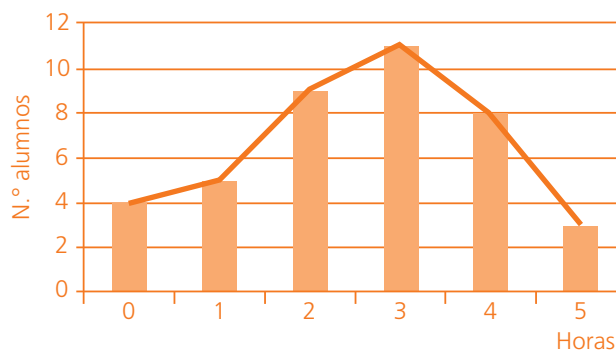
Es una variable cuantitativa discreta.

N.º horas	0	1	2	3	4	5
Recuento	4	5	9	11	8	3

3. Completa esta tabla de frecuencias a partir de los datos de la actividad anterior.

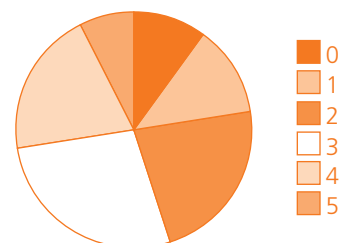
Horas ( $x_i$ )	$f_i$	$h_i$	$F_i$	$H_i$	%
0	4	0,1	4	0,1	10
1	5	0,125	9	0,225	12,5
2	9	0,225	18	0,45	22,5
3	11	0,275	29	0,725	27,5
4	8	0,2	37	0,925	20
5	3	0,075	40	1	7,5
Total	40	1			100

4. Representa los datos de la actividad 2 en un diagrama de barras y mediante un polígono de frecuencias.



5. Dibuja el diagrama de sectores correspondiente a los datos de la actividad 2.

Horas ( $x_i$ )	$h_i$	Amplitud
0	0,1	36°
1	0,125	45°
2	0,225	81°
3	0,275	99°
4	0,2	72°
5	0,075	27°



**6.** Halla la media, la mediana y la moda de los datos anteriores.

Partimos de la tabla de la actividad 3.

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + x_4 \cdot f_4 + x_5 \cdot f_5 + x_6 \cdot f_6}{N} = \frac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 3}{40} = \frac{103}{40} = 2,575$$

$$Mo = 3$$

Para calcular la mediana se calcula la media aritmética de los dos datos centrales, que corresponden a las posiciones 20 y 21. Como los dos datos en esas posiciones son iguales a 3, entonces  $Me = 3$ .

**7.** Calcula los cuartiles correspondientes a los datos de la actividad 2.

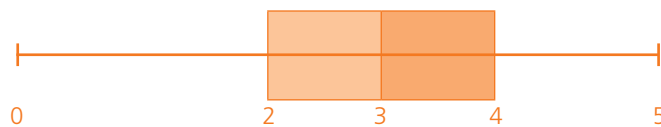
Nos fijamos en los datos de la tabla de la actividad 3.

El primer cuartil deja el 25 % de los datos a la izquierda por lo que, según la columna  $H_i$ , corresponde con 2 horas. Luego  $Q_1 = 2$ .

El segundo cuartil coincide con la mediana por lo que  $Q_2 = 3$ .

El tercer cuartil deja el 75 % de los datos a la izquierda por lo que, según la columna  $H_i$ , corresponde con 4 horas. Luego  $Q_3 = 4$ .

**8.** Representa los datos de la actividad anterior en un diagrama de caja y bigotes.



**9.** Calcula el rango, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación de los datos anteriores.

Partimos de la tabla de la actividad 3.

$$R = 5 - 0 = 5$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{x_1^2 \cdot f_1 + x_2^2 \cdot f_2 + x_3^2 \cdot f_3 + x_4^2 \cdot f_4 + x_5^2 \cdot f_5 + x_6^2 \cdot f_6}{N} - \bar{x}^2 = \\ &= \frac{0^2 \cdot 4 + 1^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 9 + 3^2 \cdot 11 + 4^2 \cdot 8 + 5^2 \cdot 3}{40} - 2,575^2 = \frac{343}{40} - 6,63 = 1,945 \end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1,944} = 1,39 \quad CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1,39}{2,575} = 0,54$$

**10.** Completa la siguiente tabla de frecuencias.

$x_i$	$f_i$	$h_i$	$F_i$	$H_i$	%
4	3	0,06	3	0,06	6
6	5	0,1	8	0,16	10
7	8	0,16	16	0,32	16
9	12	0,24	28	0,56	24
10	15	0,3	43	0,86	30
12	7	0,14	50	1	14
Total	50	1			100

# Evaluación D

- Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
  - El coeficiente de variación se utiliza para medir la dispersión de los datos.
  - El diagrama de caja y bigotes representa la media, la mediana y la moda.
  - La mediana siempre coincide con el tercer cuartil.
  - VERDADERO. Cuanto mayor sea el coeficiente de variación, mayor será la dispersión de los datos.
  - FALSO. Representa los cuartiles y la mediana.
  - FALSO. La mediana coincide con el segundo cuartil.
- Estos son los goles que ha marcado un equipo de fútbol en las últimas 20 temporadas. ¿Qué tipo de variable es? Realiza el recuento mediante intervalos de amplitud 8 empezando en [58, 66) y exprésalo mediante una tabla.

75    85    63    77    58    81    69    86    72    71  
 70    66    84    83    102    102    121    103    104    118

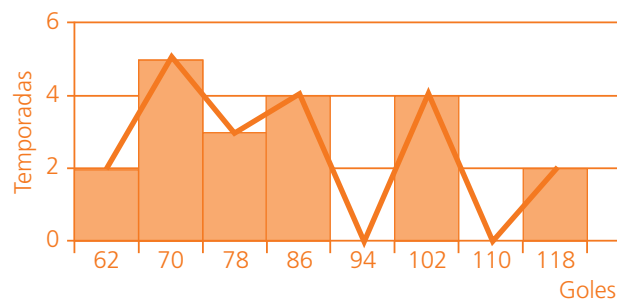
Es una variable cuantitativa discreta.

Goles	Marca de clase	Recuento
[58, 66)	62	2
[66, 74)	70	5
[74, 82)	78	3
[82, 90)	86	4
[90, 98)	94	0
[98, 106)	102	4
[106, 114)	110	0
[114, 122)	118	2

- Completa esta tabla de frecuencias a partir de los datos de la actividad anterior.

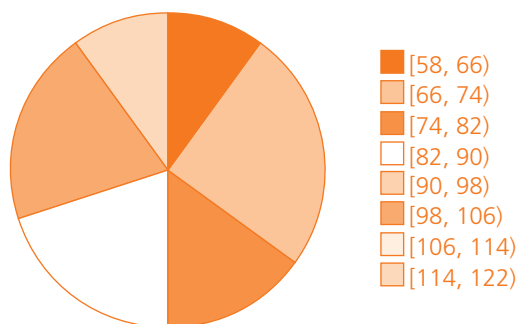
Goles	Marca de clase ( $x_i$ )	$f_i$	$h_i$	$F_i$	$H_i$	%
[58, 66)	62	2	0,1	2	0,1	10
[66, 74)	70	5	0,25	7	0,35	25
[74, 82)	78	3	0,15	10	0,5	15
[82, 90)	86	4	0,2	14	0,7	20
[90, 98)	94	0	0	14	0,7	0
[98, 106)	102	4	0,2	18	0,9	20
[106, 114)	110	0	0	18	0,9	0
[114, 122)	118	2	0,1	20	1	10
Total		20	1			100

- Representa los datos anteriores en un histograma y construye el polígono de frecuencias.



5. Dibuja el diagrama de sectores correspondiente a los datos de la actividad 2.

Goles	Marca de clase ( $x_i$ )	$h_i$	Amplitud
[58, 66)	62	0,1	36°
[66, 74)	70	0,25	90°
[74, 82)	78	0,15	54°
[82, 90)	86	0,2	72°
[90, 98)	94	0	0°
[98, 106)	102	0,2	72°
[106, 114)	110	0	0°
[114, 122)	118	0,1	36°
Suma		1	360°



6. Halla la media, la mediana y la moda de los datos anteriores.

Partimos de la tabla de la actividad 3.

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + x_4 \cdot f_4 + x_5 \cdot f_5 + x_6 \cdot f_6 + x_7 \cdot f_7 + x_8 \cdot f_8}{N} =$$

$$= \frac{62 \cdot 2 + 70 \cdot 5 + 78 \cdot 3 + 86 \cdot 4 + 94 \cdot 0 + 102 \cdot 4 + 110 \cdot 0 + 118 \cdot 2}{20} = \frac{1696}{20} = 84,8 \text{ goles}$$

El intervalo modal es [66, 74). La moda es  $Mo = 70$ .

El intervalo mediano es [74, 82) ya que su frecuencia relativa acumulada es la primera que supera 0,5. La mediana es 78.

7. Calcula los cuartiles correspondientes a los datos de la actividad 2.

Nos fijamos en los datos de la tabla de la actividad 3.

El primer cuartil deja el 25 % de los datos a la izquierda por lo que, según la columna  $H_i$ , corresponde con el intervalo [66, 74). Luego  $Q_1 = 70$ .

El segundo cuartil coincide con la mediana por lo que  $Q_2 = 78$ .

El tercer cuartil deja el 75 % de los datos a la izquierda por lo que, según la columna  $H_i$ , corresponde con el intervalo [98, 106). Luego  $Q_3 = 102$ .

8. Calcula el rango, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación de los datos anteriores.

Partimos de la tabla de la actividad 3.  $R = 195 - 165 = 30$

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 \cdot f_1 + x_2^2 \cdot f_2 + x_3^2 \cdot f_3 + x_4^2 \cdot f_4 + x_5^2 \cdot f_5 + x_6^2 \cdot f_6 + x_7^2 \cdot f_7 + x_8^2 \cdot f_8}{N} - \bar{x}^2 =$$

$$= \frac{62^2 \cdot 2 + 70^2 \cdot 5 + 78^2 \cdot 3 + 86^2 \cdot 4 + 94^2 \cdot 0 + 102^2 \cdot 4 + 110^2 \cdot 0 + 118^2 \cdot 2}{20} - 84,8^2 =$$

$$= \frac{149488}{20} - 7191,04 = 283,36$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{283,36} = 16,83 \quad CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{16,83}{84,8} = 0,198$$

9. En el examen de matemáticas, la nota media de los 24 alumnos de 3.º A de ESO ha sido 6,2, y la de los 32 alumnos de 3.º B, 7,6. ¿Cuál es la media total de todos los alumnos de 3.º A y 3.º B?

Para calcular la media tenemos en cuenta el número de alumnos de cada grupo.

$$\text{Por tanto: } \bar{x} = \frac{6,2 \cdot 24 + 7,6 \cdot 32}{24 + 32} = \frac{399,6}{56} = 7,01$$

La media total de todos los alumnos es 7,01.

# PRUEBA FINAL DE CURSO

## Evaluación A

1. Calcula y simplifica el resultado:  $\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) : \frac{2}{3}$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) : \frac{2}{3} = \frac{1}{25} - \left(\frac{2}{4} - \frac{3}{4}\right) : \frac{2}{3} = \frac{1}{25} - \left(-\frac{1}{4}\right) : \frac{2}{3} = \frac{1}{25} - \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{25} + \frac{3}{8} = \frac{8}{200} + \frac{75}{200} = \frac{83}{200}$$

2. Expresa en forma de una única potencia.

a)  $5^{-2} : (5^3)^4 \cdot (20^4 : 4^4)$       b)  $\frac{2^3 \cdot 2^{-1} \cdot 2^0}{2^4 \cdot 2^{-1}}$       c)  $((11^{-2})^3)^4 : 11$       d)  $\frac{(2^3)^4}{6^2 : 3^2}$

a)  $5^{-2} : (5^3)^4 \cdot (20^4 : 4^4) = 5^{-2} : 5^{12} \cdot (5^4 \cdot 4^4 : 4^4) = 5^{-2} : 5^{12} \cdot 5^4 = 5^{-2-12+4} = 5^{-10}$

b)  $\frac{2^3 \cdot 2^{-1} \cdot 2^0}{2^4 \cdot 2^{-1}} = \frac{2^{3-1+0}}{2^{4-1}} = \frac{2^2}{2^3} = 2^{-1}$

c)  $((11^{-2})^3)^4 : 11 = 11^{-24} : 11 = 11^{-24-1} = 11^{-25}$

d)  $\frac{(2^3)^4}{6^2 : 3^2} = \frac{2^{12}}{2^2 \cdot 3^2 : 3^2} = \frac{2^{12}}{2^2} = 2^{12-2} = 2^{10}$

3. Desarrolla las siguientes identidades notables.

a)  $(-2x - 4y)^2$       b)  $(-2y^2 + 5)^2$       c)  $(-3z + 2y^2)(-3z - 2y^2)$       d)  $\left(x^2y + \frac{1}{2}x\right)^2$

a)  $(-2x - 4y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 4y + (4y)^2 = 4x^2 + 16xy + 16y^2$

b)  $(-2y^2 + 5)^2 = (2y^2)^2 - 2 \cdot 2y^2 \cdot 5 + 5^2 = 4y^4 - 20y^2 + 25$

c)  $(-3z + 2y^2)(-3z - 2y^2) = (-3z)^2 - (2y^2)^2 = 9z^2 - 4y^4$

d)  $\left(x^2y + \frac{1}{2}x\right)^2 = (x^2y)^2 + 2 \cdot x^2y \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = x^4y^2 + x^3y + \frac{1}{4}x^2$

4. Resuelve la siguiente ecuación:  $2x^2 - 2x - 24 = 0$

Es una ecuación de segundo grado.

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-24)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 192}}{4} = \frac{2 \pm 14}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

5. Simplifica y resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{-x+2}{3} + \frac{y-1}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{2x+1}{4} - \frac{3y}{5} = -\frac{11}{20} \end{cases}$$

$$\left. \begin{cases} \frac{-x+2}{3} + \frac{y-1}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{2x+1}{4} - \frac{3y}{5} = -\frac{11}{20} \end{cases} \right\} \rightarrow \left. \begin{cases} \frac{-4x+8}{12} + \frac{3y-3}{12} = \frac{6}{12} \\ \frac{10x+5}{20} - \frac{12y}{20} = -\frac{11}{20} \end{cases} \right\} \rightarrow \left. \begin{cases} -4x+8+3y-3=6 \\ 10x+5-12y=-11 \end{cases} \right\} \rightarrow \left. \begin{cases} -4x+3y=1 \\ 10x-12y=-16 \end{cases} \right\} \rightarrow \begin{cases} -4x+3y=1 \\ 5x-6y=-8 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 2, sumamos las ecuaciones y resolvemos para hallar x.

$$\left. \begin{cases} -8x+6y=2 \\ 5x-6y=-8 \end{cases} \right\} \rightarrow -3x = -6 \rightarrow x = \frac{-6}{-3} = 2$$

Sustituimos el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones y hallamos y.

$$-4 \cdot 2 + 3y = 1 \rightarrow 3y = 9 \rightarrow y = 3$$

6. Halla el primer término, el término general y el término veinteavo de una progresión aritmética cuya diferencia es  $d = 5$  y su décimo término vale 29.

Hallamos el primer término de la progresión aritmética sustituyendo los datos que nos dan en la expresión del término general.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot 5 \rightarrow 29 = a_1 + 45 \rightarrow a_1 = -16$$

Por tanto, el término general es:  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow a_n = -16 + (n - 1) \cdot 5 \rightarrow a_n = 5n - 21$

Para hallar el término  $a_{20}$  sustituimos en la expresión del término general.

$$a_n = 5n - 21 \rightarrow a_{20} = 5 \cdot 20 - 21 = 79$$

7. Halla el área y el volumen de un cono de 12 cm de diámetro y 18 cm de generatriz.

Calculamos la longitud de la altura aplicando el teorema de Pitágoras con el radio y la generatriz.

$$h^2 = g^2 - r^2 = 18^2 - 6^2 = 324 - 36 = 288 \rightarrow h = \sqrt{288} = 16,97 \text{ cm}$$

Hallamos el área y el volumen sustituyendo los datos en las fórmulas.

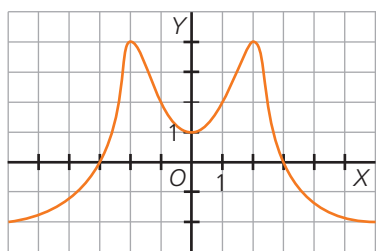
$$A_b = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 6^2 = 113,1 \text{ cm}^2$$

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 6 \cdot 18 = 339,29 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_b = 339,29 + 113,1 = 452,39 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{113,1 \cdot 16,97}{3} = \frac{1919,307}{3} = 639,769 \text{ cm}^3$$

8. Describe las características de esta gráfica.



Dominio:  $[-6, 6]$ ; Recorrido:  $[-2, 4]$

Puntos de corte:  $(-3, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(3, 0)$

Creciente en  $(-6, -2)$  y  $(0, 2)$ .

Decreciente en  $(-2, 0)$  y  $(2, 6)$ .

Máximos:  $(-2, 4)$  y  $(2, 4)$ ; Mínimo:  $(0, 1)$

La función es continua, simétrica par y no es periódica.

9. Representa la función cuadrática  $f(x) = x^2 - 2x - 8$ .

Como  $a = 1 > 0$ , la parábola tiene las ramas abiertas hacia arriba.

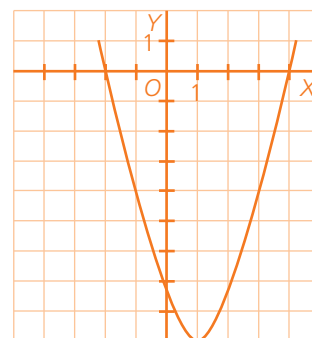
Vértice: 
$$\left. \begin{aligned} -\frac{b}{2a} &= -\frac{-2}{2} = 1 \\ f(1) &= 1 - 2 - 8 = -9 \end{aligned} \right\} \rightarrow V(1, -9)$$

Eje de simetría:  $x = 1$

Puntos de corte con el eje X:  $x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases} \rightarrow (4, 0) \text{ y } (-2, 0)$$

Puntos de corte con el eje Y:  $f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 8 = -8 \rightarrow (0, -8)$



10. Dada la siguiente tabla, halla la media, la mediana, la varianza y la desviación típica.

$x_i$	$f_i$	$F_i$	$x_i \cdot f_i$	$x_i \cdot f_i^2$
3	2	2	6	18
4	5	7	20	80
5	10	17	50	250
6	12	29	72	432
7	8	37	56	392
8	3	40	24	192
Suma	40		228	1364

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{N} = \frac{228}{40} = 5,7$$

La mediana es la media de los datos que se encuentran en las posiciones 20 y 21. Como en estas dos posiciones el dato es el mismo (6) se concluye que la mediana es 6.

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i \cdot f_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{1364}{40} - 5,7^2 = 34,1 - 32,49 = 1,61$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1,61} = 1,27$$

## Evaluación B

1. Un grupo de amigos ha realizado una ruta en tres etapas. El primer día hicieron la tercera parte del recorrido, y el segundo, las tres octavas partes de lo que quedaba. Si aún les quedan 175 km por recorrer, ¿cuál es la longitud total del trayecto?

Si el primer día recorrieron la tercera parte, el segundo día recorren:  $\frac{3}{8}$  de  $\frac{2}{3} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

Sumando el recorrido del primer y segundo día tenemos:  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$

Quedan  $\frac{5}{12}$  por recorrer que equivalen a 175 km. Por tanto, el trayecto total es:  $\frac{175 \cdot 12}{5} = 420$  km

2. Expresa en forma de una única potencia.

a)  $(-2)^{-7} \cdot (-2)^4 : [(-2)^3]^3$       b)  $5^4 : 5^{-3} \cdot 5^0 \cdot 5$       c)  $(7^{-3})^5 : 7^{-1}$       d)  $\frac{3}{((3^2)^{-6})^{-3}}$

a)  $(-2)^{-7} \cdot (-2)^4 : [(-2)^3]^3 = (-2)^{-7+4-9} = (-2)^{-12}$       c)  $(7^{-3})^5 : 7^{-1} = 7^{-15} : 7 = 7^{-15-1} = 7^{-16}$

b)  $5^4 : 5^{-3} \cdot 5^0 \cdot 5 = 5^{4-(-3)+0+1} = 5^8$       d)  $\frac{3}{((3^2)^{-6})^{-3}} = \frac{3}{3^{36}} = 3^{1-36} = 3^{-35}$

3. Desarrolla las siguientes identidades notables.

a)  $(x^2 - 3y)^2$       b)  $(2y^3 + y^2)^2$       c)  $(1 + y^2)(1 - y^2)$       d)  $\left(\frac{2}{x} + xyz\right)^2$

a)  $(x^2 - 3y)^2 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 3y + (3y)^2 = x^4 - 6x^2y + 9y^2$

b)  $(2y^3 + y^2)^2 = (2y^3)^2 + 2 \cdot 2y^3 \cdot y^2 + (y^2)^2 = 4y^6 + 4y^5 + y^4$

c)  $(1 + y^2)(1 - y^2) = 1^2 - (y^2)^2 = 1 - y^4$

d)  $\left(\frac{2}{x} + xyz\right)^2 = \left(\frac{2}{x}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{x} \cdot xyz + (xyz)^2 = \frac{4}{x^2} + 4yz + x^2y^2z^2$

4. Resuelve la siguiente ecuación:  $\frac{2x-1}{3} - \frac{3x+2}{4} = \frac{x-6}{6} - \frac{2x+8}{9}$

Es una ecuación de primer grado con denominadores.

$$\frac{2x-1}{3} - \frac{3x+2}{4} = \frac{x-6}{6} - \frac{2x+8}{9} \rightarrow \frac{24x+12}{36} - \frac{27x+18}{36} = \frac{6x-36}{36} - \frac{8x+32}{36} \rightarrow 24x-12-27x-18 = 6x-36-8x-32 \rightarrow 24x-27x-6x+8x = -36-32+12+18 \rightarrow -x = -38 \rightarrow x = 38$$

5. Simplifica y resuelve este sistema: 
$$\left. \begin{aligned} \frac{x-4}{3} + \frac{2y+1}{5} &= 6 \\ \frac{2x-1}{5} + \frac{3y-1}{4} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x-4}{3} + \frac{2y+1}{5} &= 6 \\ \frac{2x-1}{5} - \frac{3y-1}{4} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{5x-20}{15} + \frac{6y+3}{15} &= \frac{90}{15} \\ \frac{8x-4}{20} - \frac{15y-5}{20} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} 5x-20+6y+3 &= 90 \\ 8x-4-15y+5 &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} 5x+6y &= 107 \\ 8x-15y &= -1 \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo por cualquier método nos queda como solución  $x = 13$ ,  $y = 7$ .



6. Halla el término general y el séptimo término de una progresión geométrica cuya razón es  $r = \frac{2}{3}$  y su cuarto término vale  $\frac{3}{8}$ .

Hallamos el primer término de la progresión geométrica mediante la expresión del término general.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_4 = a_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4-1} \rightarrow \frac{3}{8} = a_1 \cdot \frac{8}{27} \rightarrow a_1 = \frac{3}{8} : \frac{8}{27} = \frac{81}{64}$$

Por tanto, el término general es:  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = \frac{81}{64} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

El término séptimo es:  $a_7 = \frac{81}{64} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{7-1} = \frac{1}{9}$

7. Halla el área total y el volumen de un prisma hexagonal regular sabiendo que la longitud del lado de la base es 10 cm, y su altura, 5 cm.

Calculamos la apotema de la base aplicando el teorema de Pitágoras.

$$a^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75 \rightarrow a = \sqrt{75} = 8,66 \text{ cm}$$

$$A_b = A_{\text{Hexágono}} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 10 \cdot 8,66}{2} = 259,8 \text{ cm}^2$$

$$A_L = P \cdot h = 6 \cdot 10 \cdot 5 = 300 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2A_b = 300 + 2 \cdot 259,8 = 819,6 \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h = 259,8 \cdot 5 = 1299 \text{ cm}^3$$

8. Dada la recta  $\frac{x-4}{5-4} = \frac{y+1}{6+1}$  halla las ecuaciones punto-pendiente, explícita y general de la recta.

Ecuación punto-pendiente:  $\frac{x-4}{5-4} = \frac{y+1}{6+1} \rightarrow x-4 = \frac{y+1}{7} \rightarrow y+1 = 7(x-4)$

Ecuación explícita:  $y+1 = 7(x-4) \rightarrow y+1 = 7x-28 \rightarrow y = 7x-29$

Ecuación general:  $y = 7x-29 \rightarrow -7x+y+29 = 0$

9. Representa esta función cuadrática:  $f(x) = x^2 + 2x$

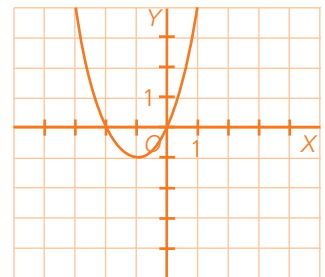
Como  $a = 1 > 0$ , la parábola tiene las ramas abiertas hacia arriba.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Vértice: } -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1 \\ f(-1) = 1 - 2 = -1 \end{array} \right\} \rightarrow V(-1, -1)$$

Eje de simetría:  $x = -1$

Puntos de corte con el eje X:  $x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \end{cases} \rightarrow (0, 0), (-2, 0)$

Puntos de corte con el eje Y:  $f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 = 0 \rightarrow (0, 0)$



10. Elvira necesita obtener un 8 de media en cuatro exámenes para poder optar a estudiar la carrera que desea. Si en tres de ellos las notas han sido 7,2; 8,5 y 8,7, ¿qué nota tendrá que sacar en el cuarto examen como mínimo para conseguir la media deseada?

Si llamamos  $x$  a la nota del cuarto examen tenemos:  $\frac{7,2 + 8,5 + 8,7 + x}{4} = 8$

Resolvemos la ecuación.

$$\frac{7,2 + 8,5 + 8,7 + x}{4} = 8 \rightarrow \frac{24,4 + x}{4} = 8 \rightarrow 24,4 + x = 32 \rightarrow x = 32 - 24,4 = 7,6$$

Necesita obtener al menos un 7,6 en el último examen.