

esenciales

3_{ESO}

MATEMÁTICAS
ORIENTADAS A
LAS ENSEÑANZAS
ACADÉMICAS

Aprueba
tus exámenes

solucionario

Oxford
EDUCACIÓN



Cómo se trabaja una unidad

Aprueba tus exámenes es un material cuyo objetivo es que el alumno repase contenidos y procedimientos de las diferentes unidades que se trabajan en el curso presentadas a modo de propuestas de evaluación para que consiga superar el curso con éxito.

Este material adopta un formato de «entrenamiento» para enfrentarse a la resolución de exámenes: cada unidad consta de cuatro pruebas; las dos primeras se presentan con ayudas didácticas para el alumno (recordatorios, alertas, explicación de procedimientos, etc., siempre asociadas a preguntas concretas), mientras las dos últimas se plantean ya sin ayudas, para que el alumno las resuelva por sí solo. Así, mediante la práctica guiada de rutinas, el alumno va adquiriendo confianza y la preparación adecuada para aprobar sus exámenes.

SISTEMAS DE ECUACIONES

Evaluación A

- Determina cuáles de estos pares de números son solución de la siguiente ecuación lineal: $3x + 2y = 7$
a) $x = 1, y = 2$ b) $x = 2, y = 1$ c) $x = 3, y = -1$ d) $x = -1, y = 5$
- Clasifica estos sistemas en compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -4x + 6y = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 9x - 3y = 7 \end{cases}$$
- Resuelve el sistema $\begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ x + 3y = -11 \end{cases}$ mediante el método de sustitución.

Ten en cuenta

Método de sustitución: se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y esa expresión se sustituye en la otra ecuación.
- Resuelve el sistema $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$ mediante el método de igualación.

Ten en cuenta

Método de igualación: se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y se igualan las expresiones.
- Resuelve el sistema $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 4x + 3y = -7 \end{cases}$ mediante el método de reducción.

Ten en cuenta

Método de reducción: se multiplican una o ambas ecuaciones por un número para igualar los coeficientes de una de las incógnitas.

Evaluación C

1. Relaciona cada ecuación lineal con su solución correspondiente.

$x - y = 2$	$x = -3, y = -2$
$-3x + y = 7$	$x = 3, y = 3$
$2x + 4y = 8$	$x = -4, y = -6$
$4x - y = 9$	$x = 0, y = 2$

Clasifica los siguientes sistemas en compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

$$\begin{cases} -x + 2y = 5 \\ x - 8y = -20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 6x - y = 12 \end{cases}$$

Resuelve este sistema mediante el método de sustitución: $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x + 2y = -2 \end{cases}$

Resuelve el siguiente sistema mediante el método de igualación: $\begin{cases} -7x + 3y = -9 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases}$

Resuelve el siguiente sistema mediante el método de reducción: $\begin{cases} 6x - y = 3 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$

ECUACIONES

Evaluación A

- Comprueba si $x = 3$ es solución de alguna de estas ecuaciones.
a) $3x - 2(2x - 1) = -1$ b) $\frac{x-1}{2} - \frac{2x}{3} = 4$ c) $x^2 - 4x + 3 = 0$ d) $2x^2 - 5x - 10 = 0$
- Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado.
a) $3(x - 1) - 2(-1 - 4x) = 5(-2x + 3)$ b) $2(x + 7) + 3 = 4(x - 3) - 7$
- Álvoro le pregunta a María por su edad y ella contesta: «Si al triple de la edad que tengo le restas la mitad de la que tenía el año pasado, obtienes la edad que tendré dentro de 14 años». Halla la edad de María.

Ten en cuenta

El primer paso para resolver un problema es identificar la incógnita, x .
- Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.
a) $3x^2 - 4x + 1 = 0$ b) $-x^2 + x + 6 = 0$

Recuerda

Las raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ se obtienen mediante la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

PRUEBA FINAL DE CURSO

Evaluación A

- Calcula y simplifica el resultado: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \frac{2}{3}$
- Halla el valor de estas expresiones.
a) $\sqrt{8} \cdot (\sqrt{2})^{-2} = 12^{-m}$ b) $9\sqrt{45}$
- Desarrolla las siguientes identidades notables.
a) $(-2x - 4y)^2$ b) $(-2y^2 + 5)^2$ c) $(-3z + 2y)(-3z - 2y)$
- Resuelve la siguiente ecuación: $2x^2 - 2x^2 - 24 = 0$
- Simplifica y resuelve el siguiente sistema: $\begin{cases} x + 2 & y - 1 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \\ 2x + 1 & 3y & 11 \\ 4 & 5 & 20 \end{cases}$
- Halla el primer término, el término general y la suma de los 50 primeros términos de una progresión aritmética cuya diferencia es 5 y su décimo término es 29.
- Halla el área y el volumen de un cono de 12 cm de diámetro y 18 cm de generatriz.
- Describe las características de esta gráfica.
- Representa la función cuadrática $f(x) = x^2 - 2x - 8$.
- Dada la siguiente tabla, halla la media, la mediana, la varianza y la desviación típica.

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
3	2	6	18
4	5	20	80
5	10	50	250
6	12	72	432
7	8	56	392
8	3	24	192
Suma	40	228	1364

Como ayuda se incluyen dos elementos: **Ten en cuenta** y **Recuerda**, que facilitan la resolución de algunas actividades.

Al final del cuaderno se presentan dos pruebas finales de curso para trabajar todos los contenidos de forma global.

Índice

Números racionales	4
Potencias y raíces	12
Polinomios	20
Ecuaciones	28
Sistemas de ecuaciones	36
Sucesiones	44
Geometría del plano. Movimientos	52
Triángulos. Propiedades	60
Geometría del espacio. Poliedros	68
Cuerpos de revolución	76
Funciones	84
Funciones lineales y cuadráticas	92
Estadística	100
Probabilidad	108
Prueba final de curso	116

 **esenciales**

3 ESO

MATEMÁTICAS
orientadas a las enseñanzas
académicas

**Aprueba tus
exámenes**

solucionario

Oxford
EDUCACIÓN

NÚMEROS RACIONALES

Evaluación A

1. Ordena de menor a mayor estas fracciones: $\frac{1}{2}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{18}{25}$, $\frac{3}{5}$

Reducimos a común denominador.

$$\frac{1}{2} = \frac{50}{100} \quad \frac{9}{20} = \frac{45}{100} \quad \frac{18}{25} = \frac{72}{100} \quad \frac{3}{5} = \frac{60}{100}$$

Como $\frac{45}{100} < \frac{50}{100} < \frac{60}{100} < \frac{72}{100}$, entonces: $\frac{9}{20} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{18}{25}$

Ten en cuenta

Para ordenar fracciones, expresamos la solución mediante las fracciones iniciales, no las equivalentes que hemos calculado.

2. Resuelve la expresión $\frac{1}{2} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{7}{4} + \frac{2}{3}\right)$ y simplifica el resultado.

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{7}{4} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{21}{12} + \frac{8}{12}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{5} \cdot \frac{29}{12} = \frac{1}{2} - \frac{87}{60} = \frac{30}{60} - \frac{87}{60} = -\frac{57}{60} = -\frac{19}{20}$$

Recuerda

Para realizar operaciones combinadas con fracciones:

- 1.º Se resuelven los paréntesis.
- 2.º Se calculan las multiplicaciones y las divisiones.
- 3.º Se resuelven las sumas y las restas.

3. Convierte estas fracciones en números decimales y clasifícalos según sean decimal exacto, periódico puro o periódico mixto.

a) $\frac{3}{11}$ b) $\frac{11}{25}$ c) $\frac{17}{18}$

a) $\frac{3}{11} = 0,272727... = 0,2\overline{7} \rightarrow$ Periódico puro

b) $\frac{11}{25} = 0,44 \rightarrow$ Exacto

c) $\frac{17}{18} = 0,944444... = 0,9\overline{4} \rightarrow$ Periódico mixto

Recuerda

Decimal exacto: número limitado de cifras decimales.

Decimal periódico puro: el período comienza después de la coma.

Decimal periódico mixto: tiene anteperíodo.

4. Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales y expresa el resultado en forma de fracción irreducible.

a) 7,6 b) $0,1\overline{8}$ c) $3,1\overline{76}$

a) $a = 7,6 \rightarrow 10a = 76 \rightarrow a = \frac{76}{10} = \frac{38}{5}$

b) $b = 0,1\overline{8} \rightarrow 100b = 18,1\overline{8} \rightarrow 100b - b = 18,1\overline{8} - 0,1\overline{8} \rightarrow 99b = 18 \rightarrow b = \frac{18}{99}$

c) $c = 3,1\overline{76} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 1000c = 3176,7\overline{6} \\ 10c = 31,7\overline{6} \end{array} \right\} \rightarrow 1000c - 10c = 3176,7\overline{6} - 31,7\overline{6} \rightarrow 990c = 3145 \rightarrow c = \frac{3145}{990} = \frac{629}{198}$

5. Ayer, Paula llenó un tercio de una piscina. Hoy ha añadido dos quintos de lo que quedaba sin llenar. Si aún faltan 400 L para llenar por completo la piscina, ¿cuál es su capacidad?




Quedaba por llenar $\frac{2}{3}$ de la piscina. Añade $\frac{2}{5}$ de $\frac{2}{3} = \frac{4}{15}$.

Se han llenado $\frac{1}{3} + \frac{4}{15} = \frac{5}{15} + \frac{4}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ de la capacidad de la piscina.

$\frac{2}{5}$ de la capacidad sin llenar son 400 L, por lo que $\frac{1}{5}$ son 200 L.

La capacidad total de la piscina es: $5 \cdot 200 = 1000$ L

6. Completa la tabla.

$[-1,5)$	$-1 \leq x < 5$	
$(-1, +\infty)$	$x > -1$	
$(-2, 3)$	$2 < x < 3$	

7. Clasifica estos números en racionales o irracionales.

a) $-\sqrt{9}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\sqrt{7}$ d) $\frac{5}{2}$

a) $-\sqrt{9} \rightarrow$ racional c) $\sqrt{7} \rightarrow$ irracional

b) $\frac{\pi}{3} \rightarrow$ irracional d) $\frac{5}{2} \rightarrow$ racional

Ten en cuenta

Número racional: se puede escribir en forma de fracción.

Número irracional: tiene infinitas cifras decimales no periódicas y raíces no exactas.

8. Un ciclista tiene que recorrer 720 km en tres días. El primer día realiza $\frac{3}{8}$ partes del total y, el segundo, $\frac{4}{9}$. ¿Qué fracción del total le falta por recorrer? ¿Cuántos kilómetros son?

Distancia recorrida entre el primer y segundo día: $\frac{3}{8} + \frac{4}{9} = \frac{27}{72} + \frac{32}{72} = \frac{59}{72}$

Fracción del total que falta por recorrer: $\frac{72}{72} - \frac{59}{72} = \frac{13}{72}$

Por tanto: $\frac{13}{72}$ de 720 = $\frac{13 \cdot 720}{72} = 130$

Le faltan por recorrer 130 km.

9. El número 0,4 es una aproximación de $\frac{5}{12}$. Calcula el error absoluto y relativo que se comete.

Error absoluto = $\left| \frac{5}{12} - 0,4 \right| = \left| \frac{5}{12} - \frac{4}{10} \right| = \left| \frac{25}{60} - \frac{24}{60} \right| = \left| \frac{1}{60} \right| = \frac{1}{60}$

Error relativo = $\frac{\left| \frac{1}{60} \right|}{\left| \frac{5}{12} \right|} = \left| \frac{12}{300} \right| = \frac{1}{25} = 0,04 \rightarrow 4\%$

Recuerda

Si a es la aproximación del número x :

Error absoluto = $|x - a|$

Error relativo = $\frac{|x - a|}{|x|}$

10. Explica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) Al sumar o restar dos números irracionales, el resultado siempre es irracional.
 - b) Siempre podemos escribir un número periódico puro en forma de fracción.
 - c) Al realizar operaciones combinadas con fracciones, las realizaremos siempre de izquierda a derecha, independientemente de la operación que sea.
- a) FALSA. La resta $\sqrt{3} - \sqrt{3}$ da como resultado 0, que es racional.
- b) VERDADERA. Todos los números periódicos puros tienen fracción generatriz.
- c) FALSA. La manera de operar es respetando la jerarquía de las operaciones.

Evaluación B

1. En una fiesta de cumpleaños, Alberto come $\frac{2}{7}$ de la tarta, Borja $\frac{1}{4}$ y Carlos el resto. ¿Quién de los tres ha comido más porción de tarta?

Entre Alberto y Borja han comido $\frac{2}{7} + \frac{1}{4} = \frac{8}{28} + \frac{7}{28} = \frac{15}{28}$. Luego, Carlos ha comido $\frac{13}{28}$.

Como $\frac{13}{28} > \frac{8}{28} > \frac{7}{28}$, Carlos es el que más porción de tarta ha comido.

2. Resuelve esta expresión y simplifica el resultado: $\left(\frac{3}{5} - \frac{2}{15}\right) \cdot \frac{2}{7} - \frac{3}{10} : 2$

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{15}\right) \cdot \frac{2}{7} - \frac{3}{10} : 2 &= \left(\frac{9}{15} - \frac{2}{15}\right) \cdot \frac{2}{7} - \frac{3}{10} : 2 = \frac{7}{15} \cdot \frac{2}{7} - \frac{3}{10} : 2 = \\ &= \frac{14}{105} - \frac{3}{20} = \frac{2}{15} - \frac{3}{20} = \frac{8}{60} - \frac{9}{60} = -\frac{1}{60} \end{aligned}$$

Ten en cuenta

Si en los pasos intermedios simplificamos cada fracción, facilitamos mucho los cálculos.

3. Los gastos mensuales de la familia Navarro se distribuyen de la siguiente forma:

- Un tercio del gasto se destina a la hipoteca.
- Un sexto, a pagar la comunidad.
- Un cuarto, a la comida.
- Los 300 € restantes, a otros gastos.

¿Cuál es el gasto mensual de la familia Navarro?

Entre la hipoteca, la comida y la comunidad gastan $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, por lo que la fracción que corresponde a otros gastos es $\frac{1}{4}$.

Es decir, $\frac{1}{4}$ del gasto total equivale a 300 €, por lo que el gasto mensual total de la familia Navarro será: $300 \cdot 4 = 1200$ €

4. Resuelve la expresión $1,2 - 1,\widehat{6} + 2,\widehat{46}$ transformando previamente los decimales en fracciones.

Ten en cuenta

Decimal exacto: $\frac{\text{número sin coma}}{\text{un 1 y tantos 0 como cifras decimales}}$

Periódico puro: $\frac{\text{número sin coma} - \text{número hasta el período}}{\text{tantos 9 como cifras periódicas}}$

Periódico mixto: $\frac{\text{número sin coma} - \text{número hasta el período}}{\text{tantos 9 como cifras periódicas y tantos 0 como anteperiódicas}}$

$$1,2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \qquad 1,\widehat{6} = \frac{16 - 1}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \qquad 2,\widehat{46} = \frac{246 - 24}{90} = \frac{222}{90} = \frac{37}{15}$$

$$1,2 - 1,\widehat{6} + 2,\widehat{46} = \frac{6}{5} - \frac{5}{3} + \frac{37}{15} = \frac{18}{15} - \frac{25}{15} + \frac{37}{15} = \frac{30}{15} = 2$$

5. ¿Para qué valores de x se cumple $|x| < 4$? Escribe la solución en forma de intervalo.

El valor absoluto se define como la distancia de un número al número 0. Por tanto, el problema nos pregunta por aquellos valores de x cuya distancia al número 0 es menor que 4.

Esto se cumple para todos los valores de x que sean, a la vez, mayores que -4 y menores que $+4$, es decir, la solución sería el intervalo $(-4, +4)$.

6. Aproxima el número 3,48 a las décimas mediante truncamiento y redondeo, y calcula el error relativo que se produce en cada caso.

Aproximación por truncamiento: 3,4

$$\text{Error relativo} = \frac{|3,48 - 3,4|}{|3,48|} = \frac{|0,08|}{|3,48|} = 0,023 \rightarrow 2,3\%$$

Aproximación por redondeo: 3,5

$$\text{Error relativo} = \frac{|3,48 - 3,5|}{|3,48|} = \frac{|-0,02|}{|3,48|} = 0,0057 \rightarrow 0,57\%$$

Ten en cuenta

El error que se comete al aproximar por redondeo siempre es menor que el que se comete al aproximar por truncamiento.

7. En un almacén hay 20 sacos de arroz de 45 kg cada uno y se gastan $\frac{2}{5}$ del total. ¿Cuántos kilos de arroz quedan?

Primero, calculamos la cantidad total de arroz que hay en el almacén: $45 \cdot 20 = 900$ kg

Se gastan $\frac{2}{5}$ de 900 = $\frac{2 \cdot 900}{5} = 360$ kg. Por tanto, quedan $900 - 360 = 540$ kg de arroz.

8. ¿Es el número $\left(3 - \frac{2}{3} : \frac{2}{9}\right) \cdot \sqrt{5}$ racional o irracional? Razona tu respuesta.

En primer lugar, calculamos el resultado de la operación.

$$\left(3 - \frac{2}{3} : \frac{2}{9}\right) \cdot \sqrt{5} = \left(3 - \frac{18}{6}\right) \cdot \sqrt{5} = (3 - 3) \cdot \sqrt{5} = 0 \cdot \sqrt{5} = 0$$

Por tanto, el número es racional ya que 0 es un número entero.

Ten en cuenta

Es importante simplificar al máximo antes de realizar la clasificación.

9. Representa las fracciones $\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{7}$ y $\frac{9}{2}$ en la misma recta real.



10. Halla tres números periódicos puros que se encuentren entre $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{7}$.

Transformamos las fracciones en números decimales dividiendo el numerador entre el denominador.

$$\frac{1}{6} = 0,166666\dots \qquad \frac{1}{7} = 0,142857\dots$$

Por tanto, tenemos que hallar 3 números periódicos puros que se encuentren entre 0,16666... y 0,142857...

Cualquiera que comience por 0,15 cumpliría la condición. Por ejemplo: 0,151515..., 0,152152152... y 0,157157157...

Evaluación C

1. Ordena de mayor a menor las siguientes fracciones $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{4}$ y $\frac{1}{2}$.

Para poder comparar las fracciones tenemos que reducirlas a común denominador, dando como resultado $\frac{36}{60}$, $\frac{50}{60}$, $\frac{105}{60}$ y $\frac{30}{60}$, respectivamente. Así pues, el orden sería $\frac{7}{4} > \frac{5}{6} > \frac{3}{5} > \frac{1}{2}$.

2. Calcula simplificando el resultado: $\frac{2}{7} : \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\right) : \left(\frac{7}{6} - 2 + \frac{1}{4}\right)$

$$\begin{aligned} \frac{2}{7} : \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\right) : \left(\frac{7}{6} - 2 + \frac{1}{4}\right) &= \frac{2}{7} : \frac{3}{4} - \left(\frac{2}{6} - \frac{5}{6}\right) : \left(\frac{14}{12} - \frac{24}{12} + \frac{3}{12}\right) = \frac{2}{7} : \frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{6}\right) : \left(-\frac{7}{12}\right) = \\ &= \frac{8}{21} - \frac{36}{42} = \frac{16}{42} - \frac{36}{42} = -\frac{20}{42} = -\frac{10}{21} \end{aligned}$$

3. Convierte las siguientes fracciones en números decimales y clasifícalos según sean decimal exacto, periódico puro o periódico mixto.

a) $\frac{3}{16}$

b) $\frac{98}{225}$

c) $\frac{2}{13}$

Para convertir las fracciones en números decimales dividimos el numerador entre el denominador.

a) $\frac{3}{16} = 0,1875 \rightarrow$ Decimal exacto

b) $\frac{98}{225} = 0,435555... = 0,43\widehat{5} \rightarrow$ Periódico mixto

c) $\frac{2}{13} = 0,153846153846... = 0,1\widehat{53846} \rightarrow$ Periódico puro

4. Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales.

a) 1,275

b) $-23,4\widehat{4}$

c) $2,1\widehat{6}$

a) $a = 1,275 \rightarrow 1000a = 1275 \rightarrow a = \frac{1275}{1000} = \frac{51}{40}$

b) Llamamos b' a b con signo positivo.

$$b' = 23,4\widehat{4} \rightarrow 10b' = 234,4\widehat{4} \rightarrow 10b' - b' = 234,4\widehat{4} - 23,4\widehat{4} \rightarrow 9b' = 211 \rightarrow b' = \frac{211}{9} \rightarrow b = -\frac{211}{9}$$

c) $c = 2,1\widehat{6} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 100c = 216,6\widehat{6} \\ 10c = 21,6\widehat{6} \end{array} \right\} \rightarrow 100c - 10c = 216,6\widehat{6} - 21,6\widehat{6} \rightarrow 90c = 195 \rightarrow c = \frac{195}{90} = \frac{13}{6}$

5. María gastó $\frac{2}{9}$ del dinero que llevaba y le han sobrado 217 €. ¿Cuánto dinero tenía al principio?

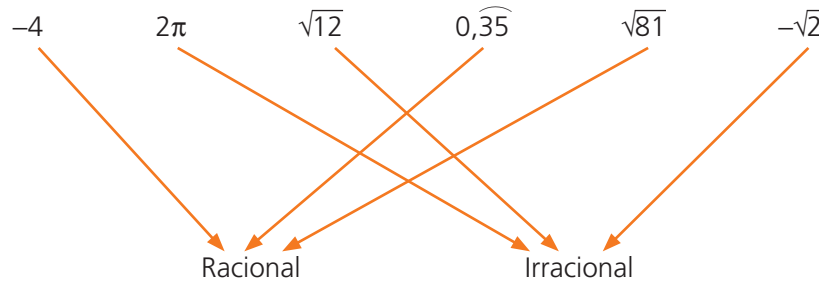
Como gastó $\frac{2}{9}$, le han sobrado $\frac{7}{9}$ que equivalen a 217 €.

Por tanto, al principio tenía: $\frac{217 \cdot 9}{7} = 279$ €

6. Escribe en forma de intervalo las siguientes desigualdades.

- a) $x \leq 2$ b) $-3 \leq x \leq -2$ c) $-1 < x \leq 3$ d) $x > 0$ e) $2 \leq x < 5$
 a) $(-\infty, 2]$ b) $[-3, -2]$ c) $(-1, 3]$ d) $(0, +\infty)$ e) $[2, 5)$

7. Une con flechas.



8. Un estudiante dedica $\frac{3}{5}$ de su tiempo libre a estudiar. La cuarta parte de lo que le queda, a hacer deporte, y el resto, a descansar. ¿Qué fracción de su tiempo libre dedica a descansar?

Si dedica $\frac{3}{5}$ de su tiempo libre a estudiar, le quedan $\frac{2}{5}$ para el resto de actividades.

A hacer deporte dedica $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{5} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$ de su tiempo libre.

Entre estudiar y hacer deporte, utiliza $\frac{3}{5} + \frac{1}{10} = \frac{6}{10} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$ de su tiempo libre.

Por tanto, descansa $\frac{3}{10}$ de su tiempo libre.

9. Calcula el error absoluto y relativo que se comete al aproximar $\frac{1}{6}$ por 0,2.

$$\text{Error absoluto} = \left| \frac{1}{6} - 0,2 \right| = \left| \frac{1}{6} - \frac{2}{10} \right| = \left| \frac{5}{30} - \frac{6}{30} \right| = \left| -\frac{1}{30} \right| = \frac{1}{30}$$

$$\text{Error relativo} = \frac{\left| \frac{1}{30} \right|}{\left| \frac{1}{6} \right|} = \left| \frac{6}{30} \right| = \frac{1}{5} = 0,2 \rightarrow 20\%$$

10. Explica razonadamente si estas afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) Todas las raíces cuadradas son números irracionales.
 b) El número 14 es racional.
 c) No se pueden comparar fracciones si tienen el mismo numerador.
- a) FALSA. Las raíces exactas son números racionales. Solo las raíces no exactas son irracionales.
 b) VERDADERA. Cualquier número entero pertenece al conjunto de los números racionales.
 c) FALSA. Si dos fracciones tienen el mismo numerador, es mayor la que tiene menor denominador.

Evaluación D

1. Los $\frac{2}{3}$ de los 216 alumnos de un instituto alguna vez han suspendido alguna asignatura. De ellos, la cuarta parte ha suspendido alguna vez matemáticas. ¿Cuántos alumnos del instituto nunca han suspendido matemáticas?

$$\frac{2}{3} \text{ de } 216 = \frac{2 \cdot 216}{3} = 144 \rightarrow \text{Hay 144 alumnos que han suspendido alguna asignatura.}$$

$$\frac{1}{4} \text{ de } 144 = \frac{144}{4} = 36 \rightarrow \text{Hay 36 alumnos que han suspendido alguna vez matemáticas.}$$

$$216 - 36 = 180$$

Por tanto, hay 180 alumnos que nunca han suspendido matemáticas.

2. Realiza la siguiente operación simplificando el resultado: $\left(2 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{7}\right) - 6 : \left(\frac{4}{3} + 2\right)$

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{7}\right) - 6 : \left(\frac{4}{3} + 2\right) &= \left(\frac{8}{4} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{7}{7} + \frac{2}{7}\right) - 6 : \left(\frac{4}{3} + \frac{6}{3}\right) = \left(\frac{7}{4}\right) \cdot \left(\frac{9}{7}\right) - 6 : \left(\frac{10}{3}\right) = \\ &= \frac{63}{28} - \frac{18}{10} = \frac{9}{4} - \frac{9}{5} = \frac{45}{20} - \frac{36}{20} = \frac{9}{20} \end{aligned}$$

3. En el cumpleaños de Sara se comieron $\frac{1}{3}$ de los pasteles que había. Al día siguiente, su familia se comió $\frac{2}{3}$ de los que quedaron. Si sobraron 6 pasteles, ¿cuántos había en total?

En el cumpleaños se comieron $\frac{1}{3}$ de los pasteles, por lo que sobraron $\frac{2}{3}$ del total.

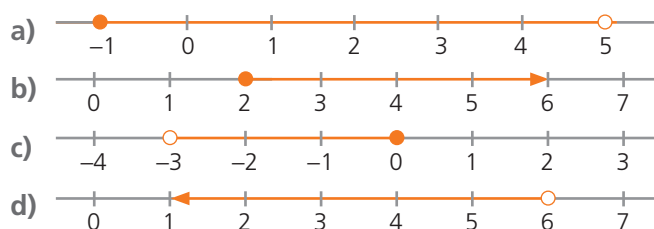
Al día siguiente, se comieron $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. En total, se han comido $\frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{3}{9} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}$ del total, por lo que han sobrado $\frac{2}{9}$ que equivalen a 6 pasteles. Por tanto, había $\frac{9 \cdot 6}{2} = 27$ pasteles en total.

4. Resuelve esta expresión transformando los decimales en fracciones: $\frac{3}{5} + 1,4 - 1,3\widehat{6}$

$$1,4 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5} \quad 1,3\widehat{6} = \frac{136 - 13}{90} = \frac{123}{90} = \frac{41}{30}$$

$$\frac{3}{5} = 1,4 - 1,3\widehat{6} = \frac{3}{5} + \frac{7}{5} - \frac{41}{30} = \frac{18}{30} + \frac{42}{30} - \frac{41}{30} = \frac{19}{30}$$

5. Expresa como intervalo o semirrecta, y como desigualdad.



a) $[-1, 5]; -1 \leq x < 5$

b) $[2, +\infty); x \geq 2$

c) $(-3, 0]; -3 < x \leq 0$

d) $(-\infty, 6); x < 6$

6. Redondea $\frac{7}{15}$ a las décimas y a las centésimas. ¿En qué caso se produce un mayor error relativo?

En primer lugar calculamos su expresión decimal: $\frac{7}{15} = 0,466666\dots$

Redondeo a las décimas: $\frac{7}{15} \approx 0,5$

$$\text{Error relativo} = \frac{\left| \frac{7}{15} - 0,5 \right|}{\left| \frac{7}{15} \right|} = \frac{\left| \frac{7}{15} - \frac{1}{2} \right|}{\left| \frac{7}{15} \right|} = \frac{\left| \frac{14}{30} - \frac{15}{30} \right|}{\left| \frac{7}{15} \right|} = \frac{\left| -\frac{1}{30} \right|}{\left| \frac{7}{15} \right|} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{7}{15}} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14} = 0,071 \rightarrow 7,1\%$$

Redondeo a las centésimas: $\frac{7}{15} \approx 0,47$

$$\text{Error relativo} = \frac{\left| \frac{7}{15} - 0,47 \right|}{\left| \frac{7}{15} \right|} = \frac{\left| \frac{7}{15} - \frac{47}{100} \right|}{\left| \frac{7}{15} \right|} = \frac{\left| \frac{140}{300} - \frac{141}{300} \right|}{\left| \frac{7}{15} \right|} = \frac{\left| -\frac{1}{300} \right|}{\left| \frac{7}{15} \right|} = \frac{\frac{1}{300}}{\frac{7}{15}} = \frac{15}{2100} = \frac{1}{140} = 0,0071 \rightarrow 0,71\%$$

Se produce un mayor error relativo redondeando a las décimas, como era de esperar.

7. En un cine han vendido $\frac{1}{3}$ del total de las entradas. Al día siguiente, se vendieron $\frac{5}{12}$. ¿Qué día se llenó más el cine?

Tenemos que comparar las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{12}$. Para ello reducimos a común denominador, resultando $\frac{4}{12}$ y $\frac{5}{12}$ respectivamente. Por tanto, el segundo día se llenó más el cine.

8. Calcula el área de un círculo de 6 cm de diámetro. ¿El resultado es un número racional o irracional?

El área del círculo viene dado por la fórmula $A = \pi \cdot r^2$. Como el diámetro mide 6 cm, el radio es 3 cm.

Por tanto, el área es $A = \pi \cdot 3^2 = 9 \cdot \pi$ que al depender de π es un número irracional.

9. Clasifica los siguientes números en racionales o irracionales

a) $1 + \sqrt{2}$

b) $\sqrt{13 + \sqrt{9}}$

c) 2,13113111311113...

a) Es irracional ya que $\sqrt{2}$ es irracional.

b) Al resolver la operación, el resultado es 4. Luego el número es racional.

c) Es irracional al tener infinitas cifras decimales no periódicas.

10. Un grifo llena una piscina en 4 horas, y otro, en 6 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse la piscina si se abren los dos grifos a la vez?

El primer grifo llenará $\frac{1}{4}$ de piscina en una hora. El segundo grifo llenará $\frac{1}{6}$ de piscina. Por tanto, si se abren

los dos a la vez, en una hora se llenará $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$ de la piscina.

Así pues, tardarán $\frac{12}{5}$ horas = 2,4 horas.

POTENCIAS Y RAÍCES

Evaluación A

1. Calcula el valor de las siguientes potencias.

a) 2^{-3}

b) 3^{-4}

c) 6^{-1}

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$

a) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

c) $6^{-1} = \frac{1}{6}$

b) $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$

Recuerda

Si un número a es distinto de cero:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

2. Expresa el resultado de estas operaciones como una única potencia.

a) $2^{-8} \cdot 2^{-4} : 2^3$

b) $(-3)^{-2} : (-3)^{-5} \cdot (-3)^7$

c) $(5^{-4})^2 : \frac{1}{5^6}$

d) $\frac{1}{((7^{-2})^{-4})^3}$

a) $2^{-8} \cdot 2^{-4} : 2^3 = 2^{-8+(-4)-3} = 2^{-15}$

b) $(-3)^{-2} : (-3)^{-5} \cdot (-3)^7 = (-3)^{-2-(-5)+7} = (-3)^{10} = 3^{10}$

c) $(5^{-4})^2 : \frac{1}{5^6} = \frac{5^{-8}}{5^6} = 5^{-8-6} = 5^{-14}$

d) $\frac{1}{((7^{-2})^{-4})^3} = \frac{1}{7^{24}} = 7^{-24}$

Recuerda

Propiedades de las potencias:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

3. Escribe estos números en notación científica.

a) 4497000000

b) 0,0000000853

c) 16000000

d) -0,0000137

a) $4497000000 = 4,497 \cdot 10^9$

c) $16000000 = 1,6 \cdot 10^7$

b) $0,0000000853 = 8,53 \cdot 10^{-8}$

d) $-0,0000137 = -1,37 \cdot 10^{-5}$

Ten en cuenta

La parte entera de un número expresado en notación científica debe estar entre 1 y 9.

4. Calcula y expresa el resultado en notación científica.

a) $3,18 \cdot 10^5 + 2,63 \cdot 10^3$

b) $1,3 \cdot 10^{-2} - 3,75 \cdot 10^{-4}$

c) $1,61 \cdot 10^{15} - 2,8 \cdot 10^{17}$

a) $3,18 \cdot 10^5 + 2,63 \cdot 10^3 = 318 \cdot 10^3 + 2,63 \cdot 10^3 = 320,63 \cdot 10^3 = 3,2063 \cdot 10^5$

b) $1,3 \cdot 10^{-2} - 3,75 \cdot 10^{-4} = 130 \cdot 10^{-4} - 3,75 \cdot 10^{-4} = 126,25 \cdot 10^{-4} = 1,2625 \cdot 10^{-2}$

c) $1,61 \cdot 10^{15} - 2,8 \cdot 10^{17} = 1,61 \cdot 10^{15} - 280 \cdot 10^{15} = -278,39 \cdot 10^{15} = -2,7839 \cdot 10^{17}$

Recuerda

Para sumar o restar números en notación científica, expresamos todos los términos en un mismo orden de magnitud, sacamos factor común la potencia de 10 y sumamos o restamos los números decimales.

5. La masa de la Tierra es $5,97 \cdot 10^{24}$ kg, y la de la Luna, $7,35 \cdot 10^{22}$ kg, aproximadamente. ¿Cuántas veces es mayor la masa de la Tierra que la de la Luna?

$$5,97 \cdot 10^{24} : 7,35 \cdot 10^{22} = 0,8122 \cdot 10^2 = 81,22$$

La masa de la Tierra es 81,22 veces mayor que la de la Luna.

Recuerda

Para multiplicar o dividir números en notación científica, operamos por un lado los números decimales y, por otro, las potencias de base 10.

6. Escribe estos radicales como potencias.

a) $\sqrt[5]{2^3}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$

c) $\sqrt{7^{-3}}$

d) $\frac{1}{\sqrt[4]{11^3}}$

a) $\sqrt[5]{2^3} = 2^{3/5}$

c) $\sqrt{7^{-3}} = 7^{-3/2}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{1}{5^{2/3}} = 5^{-2/3}$

d) $\frac{1}{\sqrt[4]{11^3}} = \frac{1}{11^{3/4}} = 11^{-3/4}$

Recuerda

Potencias de exponente fraccionario:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

7. Calcula todas las soluciones de los siguientes radicales.

a) $\sqrt[3]{-27}$

c) $\sqrt[10]{-1}$

e) $\sqrt[6]{64}$

b) $\sqrt[4]{81}$

d) $\sqrt[4]{-81}$

f) $\sqrt[3]{125}$

a) $\sqrt[3]{-27} = -3$

d) $\sqrt[4]{-81}$ no tiene solución

b) $\sqrt[4]{81} = \pm 3$

e) $\sqrt[6]{64} = \pm 2$

c) $\sqrt[10]{-1} = -1$

f) $\sqrt[3]{125} = 5$

Ten en cuenta

$$\sqrt[n]{a} \begin{cases} n \text{ par} \begin{cases} a > 0 \rightarrow 2 \text{ soluciones} \\ a < 0 \rightarrow 2 \text{ No tiene solución} \end{cases} \\ n \text{ impar} \begin{cases} a > 0 \rightarrow 1 \text{ solución positiva} \\ a < 0 \rightarrow 1 \text{ solución negativa} \end{cases} \end{cases}$$

8. Ordena de menor a mayor estos radicales.

$\sqrt{2}$

$\sqrt[3]{4}$

$\sqrt[4]{5}$

Reducimos a un índice común para poder ordenarlos.

m.c.m. (2, 3, 4) = 12

$\sqrt{2} \rightarrow \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}$

$\sqrt[3]{4} \rightarrow \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256}$

$\sqrt[4]{5} \rightarrow \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$

$\rightarrow \sqrt[12]{64} < \sqrt[12]{125} < \sqrt[12]{256} \rightarrow \sqrt{2} < \sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{4}$

Ten en cuenta

Para ordenar radicales, primero expresamos todos los radicales con un índice común. Después, ordenamos los radicandos.

9. Realiza las siguientes sumas y restas de radicales.

a) $7\sqrt{27} - 2\sqrt{48} - 4\sqrt{12} + \sqrt{75}$

b) $4\sqrt[3]{56} - 5\sqrt[3]{189} + 3\sqrt[3]{875} - 2\sqrt[3]{448}$

a) $7\sqrt{27} - 2\sqrt{48} - 4\sqrt{12} + \sqrt{75} = 7\sqrt{3^3} - 2\sqrt{2^4 \cdot 3} - 4\sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{3 \cdot 5} =$
 $= 7 \cdot 3\sqrt{3} - 2 \cdot 2^2\sqrt{3} - 4 \cdot 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 21\sqrt{3} - 8\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

b) $4\sqrt[3]{56} - 5\sqrt[3]{189} + 3\sqrt[3]{875} - 2\sqrt[3]{448} = 4\sqrt[3]{2^3 \cdot 7} - 5\sqrt[3]{3^3 \cdot 7} + 3\sqrt[3]{5^3 \cdot 7} - 2\sqrt[3]{2^6 \cdot 7} =$
 $= 4 \cdot 2\sqrt[3]{7} - 5 \cdot 3\sqrt[3]{7} + 3 \cdot 5\sqrt[3]{7} - 2 \cdot 2^2\sqrt[3]{7} = 8\sqrt[3]{7} - 15\sqrt[3]{7} + 15\sqrt[3]{7} - 8\sqrt[3]{7} = 0$

Ten en cuenta

Para sumar o restar radicales es necesario que tengan el mismo índice y el mismo radicando.

10. Calcula y simplifica el resultado si es posible.

a) $\sqrt[3]{18} : (\sqrt{2})^3$

b) $\sqrt[6]{32} \cdot \sqrt[4]{64}$

c) $(\sqrt[3]{45})^2$

a) $\sqrt[3]{18} : (\sqrt{2})^3 = \sqrt[3]{18} : \sqrt{2^3} = \sqrt[6]{18^2} : \sqrt[6]{2^9} = \sqrt[6]{\frac{18^2}{2^9}} =$
 $= \sqrt[6]{\frac{324}{512}} = \sqrt[6]{\frac{81}{128}}$

b) $\sqrt[6]{32} \cdot \sqrt[4]{64} = \sqrt[6]{2^5} \cdot \sqrt[4]{2^6} = \sqrt[12]{2^{10}} \cdot \sqrt[12]{2^{18}} = \sqrt[12]{2^{10} \cdot 2^{18}} =$
 $= \sqrt[12]{2^{28}} = \sqrt[3]{2^7}$

c) $(\sqrt[3]{45})^2 = (\sqrt[3]{5^2})^2 = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{5^2}$

Recuerda

Potencias de los radicales:

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Evaluación B

1. Calcula el resultado de las siguientes potencias.

- a) 3^2 b) 3^{-2} c) $(-3)^{-2}$ d) -3^2 e) -3^{-2} f) $(-3)^2$
- a) $3^2 = 9$ d) $-3^2 = -9$
- b) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ e) $-3^{-2} = -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9}$
- c) $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$ f) $(-3)^2 = 9$

Ten en cuenta

Al calcular una potencia, recuerda la importancia de los paréntesis.

$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$$

$$-2^2 = -2 \cdot 2 = -4$$

2. Escribe cada término como producto de factores primos y simplifica el resultado.

- a) $\frac{72 \cdot 98 \cdot 27}{28 \cdot 108 \cdot 63}$ b) $\frac{216 \cdot 24 \cdot 1000}{80 \cdot 2025 \cdot 48}$
- a) $\frac{72 \cdot 98 \cdot 27}{28 \cdot 108 \cdot 63} = \frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 7^2 \cdot 3^3}{2^2 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 3^2 \cdot 7} = \frac{2^4 \cdot 3^5 \cdot 7^2}{2^4 \cdot 3^5 \cdot 7^2} = 1$
- b) $\frac{216 \cdot 24 \cdot 1000}{80 \cdot 2025 \cdot 48} = \frac{2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 5^3}{2^4 \cdot 5 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 2^4 \cdot 3} = \frac{2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^3}{2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^3} = \frac{2}{3}$

3. Expresa estos números en notación científica y ordénalos de menor a mayor.

0,00000127 0,0003891 0,00001 0,0987

$$\left. \begin{array}{l} 0,00000127 = 1,27 \cdot 10^{-6} \\ 0,0003891 = 3,891 \cdot 10^{-4} \\ 0,00001 = 10^{-5} \\ 0,0987 = 9,87 \cdot 10^{-2} \end{array} \right\} \rightarrow 1,27 \cdot 10^{-6} < 10^{-5} < 3,891 \cdot 10^{-4} < 9,87 \cdot 10^{-2}$$

Ten en cuenta

En notación científica, el número mayor es el que tiene el mayor exponente.

4. El municipio de Valsaín se encuentra situado aproximadamente a 15 km de Segovia. ¿Cuál es la distancia en milímetros? Si en coche tardamos 24 min aproximadamente en recorrer esa distancia y hacemos ese trayecto dos veces al día todos los días del año, ¿cuántos segundos emplearemos en total? Expresa los resultados en notación científica.

Pasamos 15 km a milímetros: $15 \text{ km} = 15000000 \text{ mm} = 1,5 \cdot 10^7 \text{ mm}$

La distancia entre los dos municipios es $1,5 \cdot 10^7 \text{ mm}$.

Al año se hacen $365 \cdot 2 = 730$ trayectos.

$730 \cdot 24 = 17520 \text{ min} = 1051200 \text{ s} = 1,0512 \cdot 10^6 \text{ s}$

Emplearemos $1,0512 \cdot 10^6 \text{ s}$ en total.

5. Calcula las siguientes operaciones con radicales.

- a) $\sqrt[4]{81} \cdot \sqrt{25}$ b) $\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt{4}$ c) $\sqrt{36} : \sqrt[4]{625}$ d) $\sqrt{3 + \sqrt{169}}$
- a) $\sqrt[4]{81} \cdot \sqrt{25} = 3 \cdot 5 = 15$ c) $\sqrt{36} : \sqrt[4]{625} = 6 : 5 = \frac{6}{5}$
- b) $\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$ d) $\sqrt{3 + \sqrt{169}} = \sqrt{3 + 13} = \sqrt{16} = 4$

Ten en cuenta

Antes de operar con radicales, comprueba si puedes simplificarlos.

6. Simplifica estos radicales.

a) $\sqrt[6]{15625}$

b) $\sqrt[4]{46656}$

c) $\sqrt[5]{62208}$

d) $\sqrt[3]{11664}$

a) $\sqrt[6]{15625} = \sqrt[6]{5^6} = 5$

b) $\sqrt[4]{46656} = \sqrt[4]{2^6 \cdot 3^6} = 2 \cdot 3 \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^2} = 6 \sqrt{2 \cdot 3} = 6\sqrt{6}$

c) $\sqrt[5]{62208} = \sqrt[5]{2^8 \cdot 3^5} = 2 \cdot 3 \sqrt[5]{2^3} = 6\sqrt[5]{8}$

d) $\sqrt[3]{11664} = \sqrt[3]{2^4 \cdot 3^6} = 2 \cdot 3^2 \sqrt[3]{2} = 18\sqrt[3]{2}$

Recuerda

Para extraer factores de un radical, dividimos el exponente de cada factor entre el índice. El cociente será el exponente del factor que sale, y el resto, el exponente del factor que se queda.

7. Se quiere construir un cubo metálico con un volumen de 1728 m³ para adornar la plaza del pueblo. ¿Cuál debe ser la longitud de cada lado? ¿Qué cantidad de metal se necesitará para construirlo?

El volumen de un cubo es $V = l^3$.

Como conocemos el volumen y queremos calcular el lado, tendremos que calcular su raíz cúbica.

$l = \sqrt[3]{1728} = 12 \text{ m}$

La longitud de cada lado debe ser 12 m.

Para calcular la cantidad de metal, hallamos el área total del cubo.

$A_T = 6 \cdot A_L = 6 \cdot l^2 = 6 \cdot 12^2 = 864 \text{ m}^2$

Se necesitarán 864 m² de metal.

8. Opera y simplifica.

a) $(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2$

b) $(2\sqrt{5} + 4\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} - 3\sqrt{5})$

a) $(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{7})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{3} = 7 + 3 - 2\sqrt{21} = 10 - 2\sqrt{21}$

b) $(2\sqrt{5} + 4\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} - 3\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} + 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{5} = 2\sqrt{10} - 6\sqrt{25} + 4\sqrt{4} - 12\sqrt{10} = 2\sqrt{10} - 6 \cdot 5 + 4 \cdot 2 - 12\sqrt{10} = -22 - 10\sqrt{10}$

Ten en cuenta

Para multiplicar dos binomios, multiplicamos cada uno de los términos del primero por cada uno de los términos del segundo y reducimos términos semejantes.

9. Extrae factores del radical y simplifica las siguientes expresiones.

a) $2\sqrt[3]{16} + 4\sqrt[3]{250} - 3\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128}$

b) $-5\sqrt[4]{208} + \sqrt[4]{1053} - 7\sqrt[4]{13} - 2\sqrt[4]{8125}$

a) $2\sqrt[3]{16} + 4\sqrt[3]{250} - 3\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128} = 2\sqrt[3]{2^4} + 4\sqrt[3]{2 \cdot 5^3} - 3\sqrt[3]{2 \cdot 3^3} + \sqrt[3]{2^7} = 2 \cdot 2\sqrt[3]{2} + 4 \cdot 5\sqrt[3]{2} - 3 \cdot 3\sqrt[3]{2} + 2^2\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2} + 20\sqrt[3]{2} - 9\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} = 19\sqrt[3]{2}$

b) $-5\sqrt[4]{208} + \sqrt[4]{1053} - 7\sqrt[4]{13} - 2\sqrt[4]{8125} = -5\sqrt[4]{2^4 \cdot 13} + \sqrt[4]{3^4 \cdot 13} - 7\sqrt[4]{13} - 2\sqrt[4]{5^4 \cdot 13} = -5 \cdot 2\sqrt[4]{13} + 3\sqrt[4]{13} - 7\sqrt[4]{13} - 2 \cdot 5\sqrt[4]{13} = -10\sqrt[4]{13} + 3\sqrt[4]{13} - 7\sqrt[4]{13} - 10\sqrt[4]{13} = -24\sqrt[4]{13}$

10. Escribe estas expresiones en forma de radical y calcula el resultado.

a) $3^{1/2} \cdot 2^{1/3}$

b) $5^{1/4} \cdot 6^{2/3}$

c) $2^{3/4} : 3^{2/5}$

a) $3^{1/2} \cdot 2^{1/3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 2^2} = \sqrt[6]{108}$

b) $5^{1/4} \cdot 6^{2/3} = \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[3]{6^2} = \sqrt[12]{5^3 \cdot 12^8} = \sqrt[12]{5^3 \cdot 6^8}$

c) $2^{3/4} : 3^{2/5} = \sqrt[4]{2^3} : \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[20]{2^{15}} : \sqrt[20]{3^8} = \sqrt[20]{\frac{2^{15}}{3^8}}$

Evaluación C

1. Expresa el resultado de estas operaciones como una potencia de exponente positivo.

a) $5^{-20} \cdot 5^{18}$

b) $(3^2)^{-3} : \frac{1}{3^4}$

c) $2^{-16} : \left(\frac{1}{2}\right)^{21}$

d) $\frac{(2^{-3})^{-2}}{\frac{1}{2^2}}$

a) $5^{-20} \cdot 5^{18} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2}$

c) $2^{-16} : \left(\frac{1}{2}\right)^{21} = 2^{-16} : 2^{-21} = 2^{-16-(-21)} = 2^5$

b) $(3^2)^{-3} : \frac{1}{3^4} = 3^{-6} : 3^{-4} = 3^{-6-(-4)} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2}$

d) $\frac{(2^{-3})^{-2}}{\frac{1}{2^2}} = \frac{2^6}{2^{-2}} = 2^{6-(-2)} = 2^8$

2. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $\frac{6^{-3} \cdot 50^2 \cdot 3^{-7}}{30^{-2} \cdot 10^5}$

b) $\frac{2^{-4} \cdot 21^3 \cdot 56^{-1}}{49^{-4} \cdot 108^6}$

a) $\frac{6^{-3} \cdot 50^2 \cdot 3^{-7}}{30^{-2} \cdot 10^5} = \frac{50^2 \cdot 30^2}{6^3 \cdot 3^7 \cdot 10^5} = \frac{(2 \cdot 5^2)^2 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^2}{(2 \cdot 3)^3 \cdot 3^7 \cdot (2 \cdot 5)^5} = \frac{2^2 \cdot 5^4 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 3^7 \cdot 2^5 \cdot 5^5} = 2^{-4} \cdot 3^{-8} \cdot 5$

b) $\frac{2^{-4} \cdot 21^3 \cdot 56^{-1}}{49^{-4} \cdot 108^6} = \frac{49^4 \cdot 21^3}{2^4 \cdot 56 \cdot 108^6} = \frac{(7^2)^4 \cdot (3 \cdot 7)^3}{2^4 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot (2^2 \cdot 3^3)^6} = \frac{7^8 \cdot 3^3 \cdot 7^3}{2^4 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot 2^{12} \cdot 3^{18}} = \frac{7^{11} \cdot 3^3}{2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 7} = 2^{-19} \cdot 3^{-15} \cdot 7^{10}$

3. Completa los exponentes que faltan en las siguientes igualdades.

a) $2\,893\,000\,000 = 2,893 \cdot 10^{\boxed{9}}$

c) $31\,040\,000 = 3,104 \cdot 10^{\boxed{7}}$

b) $-0,013\,089 = 13,089 \cdot 10^{\boxed{-2}}$

d) $0,000\,000\,0049 = 4,9 \cdot 10^{\boxed{-9}}$

4. Expresa en notación científica y opera.

a) $0,000\,621 + 0,001\,8$

c) $\frac{0,027 - 0,0045}{2\,500}$

b) $(0,000\,12)^3$

d) $\frac{683\,000 \cdot 8\,200}{0,000\,14}$

a) $0,000\,621 + 0,001\,8 = 6,21 \cdot 10^{-4} + 1,8 \cdot 10^{-3} = 6,21 \cdot 10^{-4} + 18 \cdot 10^{-4} = 24,21 \cdot 10^{-4} = 2,421 \cdot 10^{-3}$

b) $(0,000\,12)^3 = (1,2 \cdot 10^{-4})^3 = 1,728 \cdot 10^{-12}$

c) $\frac{0,027 - 0,0045}{2\,500} = \frac{2,7 \cdot 10^{-2} - 4,5 \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 10^3} = \frac{27 \cdot 10^{-3} - 4,5 \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 10^3} = \frac{22,5 \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 10^3} = \frac{2,25 \cdot 10^{-2}}{2,5 \cdot 10^3} = 0,9 \cdot 10^{-5} = 9 \cdot 10^{-6}$

d) $\frac{683\,000 \cdot 8\,200}{0,000\,14} = \frac{6,83 \cdot 10^5 \cdot 8,2 \cdot 10^3}{1,4 \cdot 10^{-4}} = \frac{56,006 \cdot 10^8}{1,4 \cdot 10^{-4}} = \frac{5,6006 \cdot 10^9}{1,4 \cdot 10^{-4}} = 4,0004 \cdot 10^{13}$

5. Encuentra un radical que se encuentre entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{5}$.

Reducimos a índice común.

$$\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$$

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$$

Por tanto, un radical que se encuentre entre ellos sería cualquiera que esté entre $\sqrt[6]{8}$ y $\sqrt[6]{25}$.

Por ejemplo, $\sqrt[6]{13}$.

6. Escribe en forma de potencia y simplifica el resultado.

- a) $\sqrt[6]{2^3}$ b) $\sqrt[4]{5^8}$ c) $\sqrt[9]{7^3}$ d) $\sqrt[8]{4^2}$
- a) $\sqrt[6]{2^3} = 2^{3/6} = 2^{1/2}$ c) $\sqrt[9]{7^3} = 7^{3/9} = 7^{1/3}$
- b) $\sqrt[4]{5^8} = 5^{8/4} = 5^2 = 25$ d) $\sqrt[8]{4^2} = 4^{2/8} = (2^2)^{2/8} = 2^{4/8} = 2^{1/2}$

7. Calcula factorizando el radicando y utilizando las propiedades de los radicales.

- a) $\sqrt[3]{27000}$ b) $\sqrt[4]{1296}$ c) $\sqrt[6]{11390625}$ d) $\sqrt{148225}$
- a) $\sqrt[3]{27000} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$
- b) $\sqrt[4]{1296} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4} = 2 \cdot 3 = 6$
- c) $\sqrt[6]{11390625} = \sqrt[6]{3^6 \cdot 5^6} = 3 \cdot 5 = 15$
- d) $\sqrt{148225} = \sqrt{5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2} = 5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$

8. Realiza las siguientes operaciones con radicales.

- a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{3^2}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{81}}}$ c) $\sqrt{27\sqrt[3]{3^4}}$
- a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[15]{2^5 \cdot 3^6} = \sqrt[15]{2^5 \cdot 3^6}$
- b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{81}}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{3^4}}} = \sqrt[60]{3^4} = \sqrt[15]{3}$
- c) $\sqrt{27\sqrt[3]{3^4}} = \sqrt{\sqrt[3]{27^3 \cdot 3^4}} = \sqrt{\sqrt[3]{(3^3)^3 \cdot 3^4}} = \sqrt[6]{3^9 \cdot 3^4} = \sqrt[6]{3^{13}}$

9. Escribe en forma de un único radical.

- a) $3^{1/2} \cdot \sqrt[3]{3}$ b) $\sqrt[5]{2^2} : 5^{1/3}$ c) $2^{-1/4} \cdot 3^{1/3}$
- a) $3^{1/2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{3^5}$
- b) $\sqrt[5]{2^2} : 5^{1/3} = \sqrt[5]{2^2} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[15]{2^6} : \sqrt[15]{5^5} = \sqrt[15]{\frac{2^6}{5^5}}$
- c) $2^{-1/4} \cdot 3^{1/3} = \sqrt[4]{2^{-1}} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{\frac{1}{2^3}} \cdot \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{\frac{3^4}{2^3}} = \sqrt[12]{\frac{81}{8}}$

10. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) Un número negativo elevado a cualquier exponente es siempre negativo.
- b) Una raíz de índice impar puede tener dos soluciones.
- c) $-4^2 = 16$
- d) $\sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{8}$
- a) FALSO. Si un número negativo se eleva a un exponente par, el resultado es positivo.
- b) FALSO. Una raíz de índice impar siempre tiene una única solución.
- c) FALSO. $-4^2 = -16$. Para ser 16 debería ser $(-4)^2 = 16$.
- d) FALSO. No se pueden sumar radicales que no sean semejantes (tengan el mismo radicando).

Evaluación D

1. Ordena de menor a mayor las siguientes potencias.

$$3^{-4} \quad (-2)^{-3} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^6 \quad (-3)^{-2}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} \\ (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} \\ (-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9} \end{array} \right\} \rightarrow -\frac{1}{8} < \frac{1}{81} < \frac{1}{64} < \frac{1}{9} \rightarrow (-2)^{-3} < 3^{-4} < \left(\frac{1}{2}\right)^6 < (-3)^{-2}$$

2. Escribe como una única potencia y simplifica.

a) $9^3 \cdot 3^2 : 81$ b) $(81^4 : 27^4) \cdot 2^4$ c) $10^6 : (-2)^6 \cdot 5^3 : 2^9$ d) $((-2)^3)^4 : (8^{-4} : 4^{-4})$

a) $9^3 \cdot 3^2 : 81 = (3^2)^3 \cdot 3^2 : 3^4 = 3^6 \cdot 3^2 : 3^4 = 3^4$

b) $(81^4 : 27^4) \cdot 2^4 = 3^4 \cdot 2^4 = 6^4$

c) $10^6 : (-2)^6 \cdot 5^3 : 2^9 = (-5)^6 \cdot 5^3 : 2^9 = 5^6 \cdot 5^3 : 2^9 = 5^9 : 2^9 = \left(\frac{5}{2}\right)^9$

d) $((-2)^3)^4 : (8^{-4} : 4^{-4}) = (-2)^{12} : 2^{-4} = 2^{12} : 2^{-4} = 2^{16}$

3. Corrige las siguientes expresiones.

a) $3^2 \cdot 3^3 = 3^6$ b) $8^4 : 2^4 = 4^0$ c) $-2^4 = 16$ d) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[4]{14}$

a) $3^2 \cdot 3^3 = 3^5$ b) $8^4 : 2^4 = 4^4$ c) $-2^4 = -16$ d) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{14}$

4. Realiza estas operaciones y expresa el resultado en notación científica.

a) $3,45 \cdot 10^{-3} + 2,134 \cdot 10^{-4}$ c) $2,06 \cdot 10^4 \cdot 3,1 \cdot 10^{-2}$

b) $4,893 \cdot 10^8 - 2 \cdot 10^{11}$ d) $7,34 \cdot 10^5 : (-1,16 \cdot 10^8)$

a) $3,45 \cdot 10^{-3} + 2,134 \cdot 10^{-4} = 34,5 \cdot 10^{-4} + 2,134 \cdot 10^{-4} = 36,634 \cdot 10^{-4} = 3,6634 \cdot 10^{-3}$

b) $4,893 \cdot 10^8 - 2 \cdot 10^{11} = 4,893 \cdot 10^8 - 2000 \cdot 10^8 = -1995,107 \cdot 10^8 = -1,995107 \cdot 10^{11}$

c) $2,06 \cdot 10^4 \cdot 3,1 \cdot 10^{-2} = 6,386 \cdot 10^2$

d) $7,34 \cdot 10^5 : (-1,16 \cdot 10^8) = -6,3276 \cdot 10^{-3}$

5. Se estima que la población mundial es de $7,25 \cdot 10^9$ habitantes repartidos en 200 países, aproximadamente. Si se repartieran en partes iguales todos los habitantes entre los países, ¿cuántos habitantes habría por país? Expresa el resultado en notación científica y en notación decimal.

$$7,25 \cdot 10^9 : 200 = 0,03625 \cdot 10^9 = 3,625 \cdot 10^7$$

$$3,625 \cdot 10^7 = 36250000$$

Habría 36250000 habitantes en cada país.

6. Escribe en forma radical y simplifica.

a) $9^{3/8}$

b) $16^{1/4}$

c) $25^{3/4}$

d) $36^{3/2}$

a) $9^{3/8} = \sqrt[8]{9^3} = \sqrt[8]{(3^2)^3} = \sqrt[8]{3^6} = \sqrt[4]{3^3}$

c) $25^{3/4} = \sqrt[4]{25^3} = \sqrt[4]{(5^2)^3} = \sqrt[4]{5^6} = 5\sqrt{5^2}$

b) $16^{1/4} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

d) $36^{3/2} = \sqrt{36^3} = \sqrt{(2^2 \cdot 3^2)^3} = \sqrt{2^6 \cdot 3^6} = 2^3 \cdot 3^3 = 216$

7. Ordena de menor a mayor los siguientes radicales.

$$\sqrt[3]{5^2}$$

$$\sqrt[4]{5}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{5^5}}$$

Reducimos a un índice común para poder ordenarlos.

m.c.m. (3, 4, 2) = 12

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[3]{5^2} \rightarrow \sqrt[12]{5^8} \\ \sqrt[4]{5} \rightarrow \sqrt[12]{5^3} \\ \sqrt{\sqrt[3]{5^5}} = \sqrt[6]{5^5} \rightarrow \sqrt[12]{5^{10}} \end{array} \right\} \rightarrow \sqrt[12]{5^3} < \sqrt[12]{5^8} < \sqrt[12]{5^{10}} \rightarrow \sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{5^2} < \sqrt{\sqrt[3]{5^5}}$$

8. Extrae factores fuera del radical y reduce a radicales semejantes.

a) $\sqrt[3]{750} - \sqrt[3]{162} - \sqrt[3]{48}$

b) $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{45}{64}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{20}{36}}$

c) $\sqrt{490} + \sqrt{250} - 6\sqrt{90} + 8\sqrt{40}$

a) $\sqrt[3]{750} - \sqrt[3]{162} - \sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 5^3} - \sqrt[3]{2 \cdot 3^4} - \sqrt[3]{2^4 \cdot 3} = 5\sqrt[3]{2 \cdot 3} - 3\sqrt[3]{2 \cdot 3} - 2\sqrt[3]{2 \cdot 3} = 5\sqrt[3]{6} - 3\sqrt[3]{6} - 2\sqrt[3]{6} = 0$

b) $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{45}{64}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{20}{36}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3^2 \cdot 5}{2^6}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 3^2}} = \frac{3}{4 \cdot 2^3}\sqrt{5} - \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 3}\sqrt{5} = \frac{3}{32}\sqrt{5} - \frac{4}{18}\sqrt{5} = -\frac{37}{288}\sqrt{5}$

c) $\sqrt{490} + \sqrt{250} - 6\sqrt{90} + 8\sqrt{40} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7^2} + \sqrt{2 \cdot 5^3} - 6\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5} + 8\sqrt{2^3 \cdot 5} = 7\sqrt{10} + 5\sqrt{10} - 6 \cdot 3\sqrt{10} + 8 \cdot 2\sqrt{10} = 7\sqrt{10} + 5\sqrt{10} - 18\sqrt{10} + 16\sqrt{10} = 10\sqrt{10}$

9. Realiza estas operaciones con radicales y expresa el resultado como una potencia.

a) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{8} : \sqrt[4]{10}$

b) $\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{14} : \sqrt{\sqrt[3]{7}}$

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{5^8}}}}$

a) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{8} : \sqrt[4]{10} = \sqrt[4]{5 \cdot 8 : 10} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = 2^{2/4} = 2^{1/2}$

b) $\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{14} : \sqrt{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{14} : \sqrt[6]{7} = \sqrt[6]{2 \cdot 14 : 7} = \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^2} = 2^{2/6} = 2^{1/3}$

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{5^8}}}} = \sqrt[4]{5^8} = 5^{8/4} = 5^{1/6}$

10. El cubo de Rubik es un rompecabezas tridimensional compuesto por pequeños cubos que forman un cubo más grande. Si en cada arista del cubo grande hay 3 cubos pequeños, ¿cuántos cubos lo forman? Si quisiéramos formar el siguiente cubo más grande, ¿cuántos cubos tendría? ¿Y el siguiente? Si un cubo grande está formado por n cubitos pequeños, ¿cuántos componen cada arista?

Lo forman $3^3 = 27$ cubos.

El siguiente tendría $4^3 = 64$ cubos, y el siguiente, $5^3 = 125$ cubos.

Si un cubo está formado por n cubitos pequeños, cada arista tendría $\sqrt[3]{n}$.

POLINOMIOS

Evaluación A

1. Expresa estas frases con lenguaje algebraico.

- a) El cuadrado de la suma de dos números. c) La mitad del cubo de un número.
 b) El producto de dos números consecutivos. d) Un quinto de la diferencia de dos números.
- a) $(a+b)^2$ b) $a \cdot (a+1)$ c) $\frac{a^3}{2}$ d) $\frac{a-b}{5}$

2. Realiza las siguientes operaciones con monomios.

- a) $3x^2y \cdot (-2xy^3z)$ b) $16x^3y^2 : (-4xy^2)$ c) $\frac{1}{5}xyz^2 : \left(\frac{5}{3}x^2y^2z\right)$ d) $-3ab^2c \cdot 2a^3b$
- a) $3x^2y \cdot (-2xy^3z) = -6x^3y^4z$ c) $\frac{1}{5}xyz^2 : \left(\frac{5}{3}x^2y^2z\right) = \frac{3z}{25xy}$
 b) $16x^3y^2 : (-4xy^2) = -4x^2$ d) $-3ab^2c \cdot 2a^3b = -6a^4b^3c$

3. ¿Cuál es el valor numérico de estas expresiones para los valores que se indican? Calcula.

- a) $2a + 4b - ab$ para $a = -3, b = 2$ c) $2 - z^2 + 3x$ para $z = 1, x = -2$
 b) $\frac{-3xy^2}{z}$ para $x = -4, y = -2, z = 5$ d) $5xy - z^2$ para $x = -1, y = 7, z = 3$

Ten en cuenta

Al sustituir las variables por valores negativos, lo hacemos siempre entre paréntesis para evitar errores.

- a) $2 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 - (-3) \cdot 2 = -6 + 8 + 6 = 8$ c) $2 - 1^2 + 3 \cdot (-2) = 2 - 1 - 6 = -5$
 b) $\frac{-3 \cdot (-4) \cdot (-2)^2}{5} = \frac{48}{5}$ d) $5 \cdot (-1) \cdot 7 - 3^2 = -35 - 9 = -44$

4. De los siguientes valores, señala los que son raíz de este polinomio: $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

- a) $x = 0$ b) $x = 2$ c) $x = 3$ d) $x = -1$
- a) $P(0) = 0^3 - 7 \cdot 0^2 + 16 \cdot 0 - 12 = 0 - 0 + 0 - 12 = -12 \neq 0 \rightarrow$ No es raíz.
 b) $P(2) = 2^3 - 7 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2 - 12 = 8 - 28 + 32 - 12 = 0 \rightarrow$ Sí es raíz.
 c) $P(3) = 3^3 - 7 \cdot 3^2 + 16 \cdot 3 - 12 = 27 - 63 + 48 - 12 = 0 \rightarrow$ Sí es raíz.
 d) $P(-1) = (-1)^3 - 7 \cdot (-1)^2 + 16 \cdot (-1) - 12 = -1 - 7 - 16 - 12 = -36 \neq 0 \rightarrow$ No es raíz.

Recuerda

a es raíz de $P(x)$ si $P(a) = 0$.

5. Halla las raíces de $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ y factoriza el polinomio.

Los candidatos a ser raíz del polinomio son los divisores de 18, es decir: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$

	1	-2	-9	18
2		2	0	-18
	1	0	-9	0

2 es raíz Cociente: $x^2 - 9$

Calculamos cuál de ellos es raíz del polinomio mediante el *método de Ruffini*. El 2 es raíz, por lo que $x - 2$ es un factor. Para encontrar las otras dos raíces, resolvemos la ecuación que nos ha quedado como cociente:

$$x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3$$

La factorización es:

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = (x - 2)(x - 3)(x + 3)$$

Recuerda

Los candidatos a raíz entera de un polinomio son los divisores de su término independiente.

Si a es raíz de $P(x)$, entonces $x - a$ es factor de $P(x)$.

Evaluación B

1. Indica el grado, el coeficiente principal y el término independiente de estos polinomios.

- a) $7x^5 - 6x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5$
 b) $-x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 7$
 c) $\frac{x^6}{2} - \frac{4x^5}{3} + \frac{3x^2}{4} + \frac{2x}{7}$

Recuerda

Coeficiente principal: término de mayor grado.
Grado del polinomio: grado del coeficiente principal.
Término independiente: término de grado 0.

- a) $7x^5 - 6x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5 \rightarrow$ Grado 5, coeficiente principal 7, término independiente -5 .
 b) $-x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 7 \rightarrow$ Grado 6, coeficiente principal -1 , término independiente -7 .
 c) $\frac{x^6}{2} - \frac{4x^5}{3} + \frac{3x^2}{4} + \frac{2x}{7} \rightarrow$ Grado 6, coeficiente principal $\frac{1}{2}$, no tiene término independiente.

2. Halla para qué valor de a se cumple que $P(1) = -5$ siendo $P(x) = -x^3 + ax^2 + 5x - 4$.

Sustituyendo en el polinomio:

$$P(1) = -1^3 + a \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 4 = -5 \rightarrow -1 + a + 5 - 4 = -5 \rightarrow a = -5$$

3. Dados los polinomios $A(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $B(x) = -5x^3 + 2x - 1$ y $C(x) = 4x^2 - 5$, calcula:

- a) $A(x) + B(x) + C(x)$ b) $2A(x) - B(x) - C(x)$ c) $A(x) \cdot C(x) - B(x)$
- a) $A(x) + B(x) + C(x) = 3x^2 - 2x + 1 + (-5x^3 + 2x - 1) + (4x^2 - 5) = 3x^2 - 2x + 1 - 5x^3 + 2x - 1 + 4x^2 - 5 = -5x^3 + 7x^2 - 5$
 b) $2A(x) - B(x) - C(x) = 2(3x^2 - 2x + 1) - (-5x^3 + 2x - 1) - (4x^2 - 5) = 6x^2 - 4x + 2 + 5x^3 - 2x + 1 - 4x^2 + 5 = 5x^3 + 2x^2 - 6x + 8$
 c) $A(x) \cdot C(x) - B(x) = (3x^2 - 2x + 1)(4x^2 - 5) - (-5x^3 + 2x - 1) = 12x^4 - 15x^2 - 8x^3 + 10x + 4x^2 - 5 + 5x^3 - 2x + 1 = 12x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 8x - 4$

4. Desarrolla las siguientes identidades notables.

- a) $(-3x^2 - 4y)^2$ b) $(-6 + z^2)^2$ c) $(2xy - 4z^2)(2xy + 4z^2)$ d) $\left(1 + \frac{x}{y}\right)^2$
- a) $(-3x^2 - 4y)^2 = (3x^2)^2 + 2 \cdot 3x^2 \cdot 4y + (4y)^2 = 9x^4 + 24x^2y + 16y^2$
 b) $(-6 + z^2)^2 = 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot z^2 + (z^2)^2 = 36 - 12z^2 + z^4$
 c) $(2xy - 4z^2)(2xy + 4z^2) = (2xy)^2 - (4z^2)^2 = 4x^2y^2 - 16z^4$
 d) $\left(1 + \frac{x}{y}\right)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{x}{y} + \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1 + \frac{2x}{y} + \frac{x^2}{y^2}$

Recuerda

$(-a - b)^2 = (a + b)^2$
 $(-a + b)^2 = (a - b)^2$

5. Realiza las siguientes divisiones de polinomios entre monomios.

- a) $(2x^3y^2 - 5x^2y^2 + 6xy^3) : (-2xy)$ b) $(-6abc + 4ab^2c + 2a^2b^3c) : (3ab)$
- a) $(2x^3y^2 - 5x^2y^2 + 6xy^3) : (-2xy) = -x^2y + \frac{5}{2}xy - 3y^2$
 b) $(-6abc + 4ab^2c + 2a^2b^3c) : (3ab) = -2c + \frac{4}{3}bc + \frac{2}{3}ab^2c$

6. Observa estas expresiones y extrae factor común en cada caso.

a) $4x^5 - 3x^4 + 6x^3 + 2x^2$

c) $-3a^2b + 2a^2b^2 - 3ab^2$

b) $10x^2y - 20x^2z^2$

d) $10y^2x - 5x^2z + 2x^2t - 3xzt$

a) $4x^5 - 3x^4 + 6x^3 + 2x^2 = x^2(4x^3 - 3x^2 + 6x + 2)$

b) $10x^2y - 20x^2z^2 = 10x^2(y - 2z^2)$

c) $-3a^2b + 2a^2b^2 - 3ab^2 = ab(-3a + 2ab - 3b)$

d) $10y^2x - 5x^2z + 2x^2t - 3xzt = x(10y^2 - 5xz + 2xt - 3zt)$

7. Resuelve estas divisiones por el método de Ruffini. Recuerda escribir los coeficientes del dividendo ordenados según el grado, sin omitir los términos nulos.

a) $(x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 6x + 3) : (x - 2)$

b) $(-x^4 + 3x^2 - 5x + 1) : (x + 1)$

2	1	-4	0	3	-6	3
		2	-4	-8	-10	-32
	1	-2	-4	-5	-16	-29

Cociente: $x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 5x - 16$ Resto: -29

-1	-1	0	3	-5	1
		1	-1	-2	7
	-1	1	2	-7	8

Cociente: $-x^3 + x^2 + 2x - 7$ Resto: 8

8. Halla el valor de m para que el polinomio $x^3 + mx^2 - 5x - 6$ sea divisible por $x + 1$.

Si el polinomio dado es divisible por $x + 1$, al hacer la división el resto será igual a 0.

Por tanto, por el teorema del resto, $P(-1) = 0$.

Sustituyendo: $P(-1) = (-1)^3 + m \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 = 0 \rightarrow -1 + m + 5 - 6 = 0 \rightarrow m - 2 = 0 \rightarrow m = 2$

9. Encuentra las raíces y factoriza el polinomio: $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$

Extraemos factor común: $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$

Como un factor es x , entonces, una raíz del polinomio es $x = 0$.

Queda por encontrar, como máximo, tres raíces más porque el polinomio es de grado 4.

Factorizamos el polinomio $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, para lo que buscamos como raíces enteras divisores de -1 .

En este caso probamos con 1 y -1 mediante el método de Ruffini.

1	1	-3	3	-1
		1	-2	1
	1	-2	1	0

1 es raíz Cociente: $x^2 - 2x + 1$

Una vez hallada la primera raíz, obtenemos un polinomio de grado 2, por lo que las otras dos raíces las encontramos resolviendo la ecuación de segundo grado que quedó como cociente, $x^2 - 2x + 1 = 0$, y que tiene como solución $x = 1$ (doble).

Las raíces son entonces $x = 0, x = 1$ (solución triple).

Por tanto, la factorización es: $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = x(x - 1)$

Ten en cuenta
En primer lugar, extraemos factor común si es posible.

10. Calcula el volumen de un cubo cuya arista mide $2x - 3$ metros.

El volumen de un cubo de arista l viene dado por la fórmula $V = l^3$. En nuestro caso, $V = (2x - 3)^3$

Haciendo cálculos: $V = (2x - 3)^3 = (2x - 3)^2(2x - 3) = (4x^2 - 12x + 9)(2x - 3) = 8x^3 - 12x^2 - 24x^2 + 36x + 18x - 27 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 \text{ m}^3$

Evaluación C

1. Expresa mediante lenguaje algebraico las siguientes expresiones.

- a) El cubo del producto de dos números. c) La diferencia del cuadrado de dos números.
 b) La suma de dos números pares consecutivos. d) La sexta parte de la raíz cúbica de un número.

a) $(x \cdot y)^3$ b) $2x + (2x + 2)$ c) $x^2 - y^2$ d) $\frac{\sqrt[3]{x}}{6}$

2. Halla el valor numérico del polinomio $x^5 - 4x^3 - 11x^2 + 3x - 7$ para $x = -1$, $x = 3$ y $x = 0$.

Para $x = -1 \rightarrow (-1)^5 - 4 \cdot (-1)^3 - 11 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 7 = -1 + 4 - 11 - 3 - 7 = -18$

Para $x = -3 \rightarrow (-3)^5 - 4 \cdot (-3)^3 - 11 \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3) - 7 = -243 + 108 - 99 - 9 - 7 = -250$

Para $x = 0 \rightarrow 0^5 - 4 \cdot 0^3 - 11 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 7 = -7$

3. Resuelve estas operaciones con polinomios.

a) $(x^3 - 2x^2)(3x - 7)$

b) $(2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 6x - 1) - (4x^3 - 2x^2 + 5x - 3)$

c) $(4x^2 - 2x + 1)(-x^3 + 2x^2 + 5x - 3)$

d) $(2x^4 + 5x^3 + x^2 - 6) + (-4x^3 - 2x^2 + x - 1) - (3x^2 + 5x - 6)$

a) $(x^3 - 2x^2)(3x - 7) = 3x^4 - 7x^3 - 6x^3 + 14x^2 = 3x^4 - 13x^3 + 14x^2$

b) $(2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 6x - 1) - (4x^3 - 2x^2 + 5x - 3) =$
 $= 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 6x - 1 - 4x^3 + 2x^2 - 5x + 3 = 2x^4 + x^3 - x^2 + x + 2$

c) $(4x^2 - 2x + 1)(-x^3 + 2x^2 + 5x - 3) = -4x^5 + 8x^4 + 20x^3 - 12x^2 + 2x^4 -$
 $- 4x^3 - 10x^2 + 6x - x^3 + 2x^2 + 5x - 3 = -4x^5 + 10x^4 + 15x^3 - 20x^2 + 11x - 3$

d) $(2x^4 + 5x^3 + x^2 - 6) + (-4x^3 - 2x^2 + x - 1) - (3x^2 + 5x - 6) =$
 $= 2x^4 + 5x^3 + x^2 - 6 - 4x^3 - 2x^2 + x - 1 - 3x^2 - 5x + 6 = 2x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x - 1$

4. Completa las siguientes identidades notables.

a) $x^2 + 6xy + 9y^2 = (\boxed{x} + \boxed{3y})^2$

d) $x^4 - 10x^2y + 25y^2 = (\boxed{x^2} - \boxed{5y})^2$

b) $4x^2 - 1 = (\boxed{2x} + \boxed{1})(\boxed{2x} - \boxed{1})$

e) $4x^2 - 20xy + 25y^2 = (\boxed{2x} - \boxed{5y})^2$

c) $49x^4 + \boxed{14x^2} + 1 = (\boxed{7x^2} + \boxed{1})^2$

f) $9 - \boxed{16x^4} = (\boxed{3} + 4x^2)(\boxed{3} - \boxed{4x^2})$

5. Halla las raíces y factoriza este polinomio: $-3x^3 - 6x^2 + 3x + 6$

En primer lugar, extraemos factor común y obtenemos: $-3x^3 - 6x^2 + 3x + 6 = -3(x^3 + 2x^2 - x - 2)$

Después, factorizamos el polinomio: $x^3 + 2x^2 - x - 2$

Los candidatos a raíz del polinomio son los divisores de 2, es decir: $\pm 1, \pm 2$

	1	2	-1	-2
1		1	3	2
	1	3	2	0

1 es raíz

Cociente: $x^2 + 3x + 2$

Vemos, mediante el método de Ruffini, que 1 es raíz del polinomio.

Para encontrar las otras dos raíces, resolvemos la ecuación de segundo

grado que ha quedado como cociente: $x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases}$

La factorización es: $-3x^3 - 6x^2 + 3x + 6 = -3(x + 2)(x + 1)(x - 1)$

6. Resuelve esta división: $(2x^6 - 4x^4 + 10x + 10) : (x^2 - 2x + 5)$

$$\begin{array}{r}
 2x^6 \quad - 4x^4 \quad + 10x + 10 \quad | \quad x^2 - 2x + 5 \\
 \underline{-2x^6 + 4x^5 - 10x^4} \quad 2x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 32x - 34 \\
 4x^5 - 14x^4 \\
 \underline{-4x^5 + 8x^4 - 20x^3} \\
 -6x^4 - 20x^3 + 10x + 10 \\
 \underline{6x^4 - 12x^3 + 30x^2} \\
 -32x^3 + 30x^2 + 10x + 10 \\
 \underline{32x^3 - 64x^2 + 160x} \\
 -34x^2 + 170x + 10 \\
 \underline{34x^2 - 68x + 170} \\
 102x + 180
 \end{array}$$

7. Resuelve mediante el método de Ruffini.

a) $(x^6 - 4x^4 + 6x^3 + 1) : (x - 2)$

a)

2	1	0	-4	6	0	0	1
		2	4	0	12	24	48
	1	2	0	6	12	24	49

Cociente: $x^5 + 2x^4 + 6x^2 + 12x + 24$ Resto: 49

b) $(4x^3 - 5x^2 + 6) : (x - 3)$

b)

3	4	-5	0	6
		12	21	63
	4	7	21	69

Cociente: $4x^2 + 7x + 21$ Resto: 69

8. Calcula, sin efectuar la división, el resto de dividir $x^4 - x^3 + 5x^2 - 6$ entre $x - 2$.

Según el teorema del resto, el resto de dividir $x^4 - x^3 + 5x^2 - 6$ entre $x - 2$ coincide con el valor numérico al sustituir en el polinomio $x = 2$.

Así pues, el resto es: $2^4 - 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 6 = 16 - 8 + 20 - 6 = 22$

9. Responde razonadamente si estas afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) Al sumar o restar dos polinomios de grado 3, el resultado es un polinomio de grado 3.
- b) Un polinomio de grado 4 puede tener 4 raíces.
- c) El polinomio $x^5 - 4x^3 + 2x - 3$ no tiene coeficiente principal.
- d) La división $(2x^3 + 3x^2 - 6x + 3) : (x^2 - 1)$ se puede resolver mediante el método de Ruffini.

- a) FALSO. Por ejemplo: $(2x^3 - 3x^2 + 5x + 7) + (-2x^3 + 15x - 3) = -3x^2 + 20x + 4$
- b) VERDADERO. Un polinomio de grado n tiene, como máximo, n raíces reales.
- c) FALSO. El coeficiente principal es 1.
- d) FALSO. El método de Ruffini solo se puede aplicar cuando el divisor es de la forma $x + a$ o $x - a$.

10. El ancho de una caja de cartón mide x metros. Si el alto mide el doble que el ancho, y el largo el triple, calcula en función de x :

- a) El volumen de la caja.
- b) El área de la caja.

Si el ancho mide x , el alto mide $2x$ y el ancho $3x$.

a) $V = a \cdot b \cdot c = x \cdot 2x \cdot 3x = 6x^3$

b) $A = 2ab + 2ac + 2bc = 2 \cdot x \cdot 2x + 2 \cdot x \cdot 3x + 2 \cdot 2x \cdot 3x = 22x^2$

Evaluación D

1. ¿De cuál de estos polinomios es $x = -1$ raíz?

a) $P(x) = -x^3 - 1$ b) $Q(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ c) $R(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ d) $S(x) = x^2 + x + 1$

a) $P(-1) = -(-1)^3 - 1 = 1 - 1 = 0 \rightarrow$ Sí es raíz.

b) $Q(-1) = (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0 \rightarrow$ Sí es raíz.

c) $R(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 1 = -1 + 3 - 3 + 1 = 0 \rightarrow$ Sí es raíz.

d) $S(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0 \rightarrow$ No es raíz.

2. Realiza la siguiente operación con polinomios: $\frac{x^2 - 3x}{2} + \frac{4x + 1}{6} - \frac{-x^3 + 5x}{3} + \frac{x^2 - 7}{4}$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3x}{2} + \frac{4x + 1}{6} - \frac{-x^3 + 5x}{3} + \frac{x^2 - 7}{4} &= \frac{6x^2 - 18x}{12} + \frac{8x + 2}{12} - \frac{-4x^3 + 20x}{12} + \frac{3x^2 - 21}{12} = \\ &= \frac{6x^2 - 18x + 8x + 2 - (-4x^3 + 20x) + 3x^2 - 21}{12} = \\ &= \frac{6x^2 - 18x + 8x + 2 + 4x^3 - 20x + 3x^2 - 21}{12} = \frac{4x^3 + 9x^2 - 30x - 19}{12} \end{aligned}$$

3. Desarrolla estas igualdades notables.

a) $(2a - 2z)^2$

c) $(3x^2 + 5y)^2$

e) $(-1 - x^4)^2$

b) $(4 + y^2)(4 - y^2)$

d) $\left(\frac{1}{2} + z^2\right)^2$

f) $(x^2 - x^3)^2$

a) $(2a - 2z)^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 2z + (2z)^2 = 4a^2 - 8az + 4z^2$

b) $(4 + y^2)(4 - y^2) = 4^2 - (y^2)^2 = 16 - y^4$

c) $(3x^2 + 5y)^2 = (3x^2)^2 + 2 \cdot 3x^2 \cdot 5y + (5y)^2 = 9x^4 + 30x^2y + 25y^2$

d) $\left(\frac{1}{2} + z^2\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot z^2 + (z^2)^2 = \frac{1}{4} + z^2 + z^4$

e) $(-1 - x^4)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot x^4 + (x^4)^2 = 1 + 2x^4 + x^8$

f) $(x^2 - x^3)^2 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot x^3 + (x^3)^2 = x^4 - 2x^5 + x^6$

4. Extrae factor común en cada caso.

a) $-2x^3y + 3x^2z + 6x^2t - 2xyz$

c) $8x^3z + 4x^2y - 2x^2t^2 + 6x^4$

b) $2a^2bc - 3ab^2c + 4abc^2$

d) $15xy^2 - 5x^2z + 10y^2z$

a) $-2x^3y + 3x^2z + 6x^2t - 2xyz = x(-2x^2y + 3xz + 6xt - 2yz)$

b) $2a^2bc - 3ab^2c + 4abc^2 = abc(2a - 3b + 4c)$

c) $8x^3z + 4x^2y - 2x^2t^2 + 6x^4 = 2x^2(4xz + y - t^2 + 3x^2)$

d) $15xy^2 - 5x^2z + 10y^2z = 5(3xy^2 - x^2z + 2y^2z)$

5. Halla el dividendo de una división si sabemos que el divisor es $3x - 1$, el cociente $4x^3 + 6x^2 - 5x - 1$ y el resto, 5.

Sabemos que: dividendo es igual a divisor por cociente más resto. Operando:

$$\begin{aligned} \text{Dividendo: } (3x - 1)(4x^3 + 6x^2 - 5x - 1) + 5 &= 12x^4 + 18x^3 - 15x^2 - 3x - 4x^3 - 6x^2 + 5x + 1 + 5 = \\ &= 12x^4 + 14x^3 - 21x^2 + 2x + 6 \end{aligned}$$

6. Resuelve las divisiones mediante el método de Ruffini.

a) $(x^5 + 4x^4 - 3x^2 + 5x - 1) : (x - 1)$

1		1	4	0	-3	5	-1
		1	5	5	2	7	
		1	5	5	2	7	6

Cociente: $x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 2x + 7$ Resto: 6

b) $(x^4 - 4x^3 - 2x^2 + x + 22) : (x - 2)$

2		1	-4	-2	1	22
		2	-4	-12	-22	
		1	-2	-6	-11	0

Cociente: $x^3 - 3x^2 - 5x - 4$ Resto: 0

7. Determina el valor de m en el polinomio $x^5 - 4mx^4 - 3x^2 + 5x - 6$ para que al dividirlo entre $x - 1$ el resto sea 12.

Por el teorema del resto, buscamos el valor de m para que $P(1) = 12$.

$$P(1) = 1^5 - 4 \cdot m \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 6 = 12 \rightarrow 1 - 4m - 3 + 5 - 6 = 12 \rightarrow -4m = 15 \rightarrow m = -\frac{15}{4}$$

8. Encuentra las raíces y factoriza este polinomio: $x^3 - 7x^2 + 16x - 2$

Los candidatos a raíz del polinomio son los divisores de -12 , es decir: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

Probamos, mediante el método de Ruffini, cuál de ellos es raíz del polinomio: 2 es raíz, por lo que $x - 2$ es un factor.

2		1	-7	16	-12
		2	-10	12	
		1	-5	6	0

2 es raíz Cociente: $x^2 - 5x + 6$

Para encontrar las otras dos raíces, resolvemos la ecuación de segundo grado que ha quedado como cociente: $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$, por lo que las otras dos raíces son 2 y 3.

Por tanto, los otros factores son $x - 2$ y $x - 3$.

En resumen, las tres raíces del polinomio son $x = 2$ (doble) y $x = 3$.

La factorización es: $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = (x - 2)^2(x - 3)$

9. Escribe un polinomio de grado 4 cuyas raíces sean: $x = 0, x = -1, x = 2$ y $x = -3$

Si las raíces son $x = 0, x = -1, x = 2$ y $x = -3$, entonces los factores son: $x, x + 1, x - 2$ y $x + 3$

Multiplicando todos los factores, obtenemos:

$$x(x + 1)(x - 2)(x + 3) = (x^2 + x)(x^2 + x - 6) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$$

10. El radio de un cilindro mide $2x - 3$ centímetros, y su volumen, $(12x^3 - 36x^2 + 27x)\pi$ centímetros cúbicos. ¿Cuánto mide su altura?

El volumen de un cilindro viene dado por la fórmula: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Sustituyendo esos datos en la ecuación, obtenemos:

$$(12x^3 - 36x^2 + 27x)\pi = \pi(2x - 3)^2 h$$

Despejando la altura en la ecuación, obtenemos el resultado:

$$h = \frac{(12x^3 - 36x^2 + 27x)\pi}{\pi(2x - 3)^2} = \frac{12x^3 - 36x^2 + 27x}{(2x - 3)^2} = \frac{12x^3 - 36x^2 + 27x}{4x^2 - 12x + 9} = 3x$$

Luego, la altura mide $3x$ cm.

ECUACIONES

Evaluación A

1. Comprueba si $x = 3$ es solución de alguna de estas ecuaciones.

a) $3x - 2(2x - 1) = -1$ b) $\frac{x-1}{2} - \frac{2x}{3} = 4$ c) $x^2 - 4x + 3 = 0$ d) $2x^2 - 5x - 10 = 0$

Sustituimos $x = 3$ en cada ecuación y vemos en cuáles se cumple la igualdad.

a) $3 \cdot 3 - 2(2 \cdot 3 - 1) = 9 - 2(6 - 1) = 9 - 2 \cdot 5 = 9 - 10 = -1 \rightarrow$ Sí es solución.

b) $\frac{3-1}{2} - \frac{2 \cdot 3}{3} = \frac{2}{2} - \frac{6}{3} = 1 - 2 = -1 \neq 4 \rightarrow$ No es solución.

c) $3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0 \rightarrow$ Sí es solución.

d) $2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 - 10 = 2 \cdot 9 - 15 - 10 = 18 - 15 - 10 = -7 \neq 0 \rightarrow$ No es solución.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado.

a) $3(x - 1) - 2(-1 - 4x) = 5(-2x + 3)$

b) $2(x + 7) + 3 = 4(x - 3) - 7$

a) $3(x - 1) - 2(-1 - 4x) = 5(-2x + 3) \rightarrow 3x - 3 + 2 + 8x = -10x + 15 \rightarrow 3x + 8x + 10x = 15 + 3 - 2 \rightarrow 21x = 16 \rightarrow x = \frac{16}{21}$

b) $2(x + 7) + 3 = 4(x - 3) - 7 \rightarrow 2x + 14 + 3 = 4x - 12 - 7 \rightarrow 2x - 4x = -12 - 7 - 14 - 3 \rightarrow -2x = -36 \rightarrow x = \frac{-36}{-2} = 18$

3. Álvaro le pregunta a María por su edad y ella contesta: «Si al triple de la edad que tengo le restas la mitad de la que tenía el año pasado, obtienes la edad que tendré dentro de 14 años». Halla la edad de María.

Si llamamos x a la edad de María, el año pasado tenía $x - 1$ y dentro de 14 años tendrá $x + 14$. Planteamos la ecuación y la resolvemos.

$$3x - \frac{x-1}{2} = x + 14 \rightarrow \frac{6x}{2} - \frac{x-1}{2} = \frac{2x+28}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 6x - x + 1 = 2x + 28 \rightarrow 6x - x - 2x = 28 - 1 \rightarrow 3x = 27 \rightarrow x = \frac{27}{3} = 9$$

María tiene 9 años.

4. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $3x^2 - 4x + 1 = 0$

b) $-x^2 + x + 6 = 0$

a) $x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ x_2 = 1 \end{cases}$

b) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-2} = \frac{-1 \pm 5}{-2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4}{-2} = -2 \\ x_2 = \frac{-6}{-2} = 3 \end{cases}$

Ten en cuenta

El primer paso para resolver un problema es identificar la incógnita, x .

Recuerda

Las soluciones de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ se obtienen mediante la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su área es 117 cm^2 y la base mide 4 cm más que la altura.

Si llamamos x a la altura del rectángulo, la base medirá $x + 4$. Como el área es $A = b \cdot a$, entonces:

$$x(x + 4) = 117 \rightarrow x^2 + 4x - 117 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-117)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 468}}{2} =$$

$$= \frac{-4 \pm 22}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{18}{2} = 9 \\ x_2 = \frac{-26}{2} = -13 \end{cases}$$

Nos quedamos con la solución positiva ya que x es una longitud. Por tanto, la altura mide 9 cm , y la base, 13 cm .

6. Resuelve estas ecuaciones de segundo grado incompletas.

a) $9x^2 - 1 = 0$

b) $16x^2 + 8x = 0$

a) $9x^2 - 1 = 0 \rightarrow 9x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{9}} = \pm \frac{1}{3}$

b) $16x^2 + 8x = 0 \rightarrow 8x(2x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} 8x = 0 \rightarrow x = 0 \\ 2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

7. Halla las soluciones de esta ecuación: $\frac{2x^2 - 1}{2} - \frac{x - 1}{3} = \frac{1 - 2x}{6}$

$$\frac{2x^2 - 1}{2} - \frac{x - 1}{3} = \frac{1 - 2x}{6} \rightarrow \frac{6x^2 - 3}{6} - \frac{2x - 2}{6} = \frac{1 - 2x}{6} \rightarrow 6x^2 - 3 - 2x + 2 = 1 - 2x \rightarrow 6x^2 - 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 6x^2 = 2 \rightarrow x^2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

8. Resuelve la siguiente ecuación bicuadrada: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

Realizamos el cambio de variable $x^2 = p$ y resolvemos $p^2 - 10p + 9 = 0$.

$$p = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} \rightarrow \begin{cases} p_1 = 9 \\ p_2 = 1 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variable: $\begin{cases} x^2 = 9 \rightarrow x = \pm \sqrt{9} = \pm 3 \\ x^2 = 1 \rightarrow x = \pm \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$

9. Factoriza y resuelve la siguiente ecuación: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

Factorizamos el polinomio: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x - 3)(x + 2) = 0$

Igualamos cada uno de los factores a 0 y resolvemos las ecuaciones.

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \quad x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \quad x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

10. Valeria se gastó $\frac{1}{5}$ del dinero que tenía ahorrado en invitar a sus amigos a su cumpleaños, $\frac{3}{4}$ del dinero restante en ropa y aún le sobraron 10 € . ¿Cuánto dinero tenía ahorrado?

Llamamos x al dinero que tiene ahorrado Valeria y plantemos y resolvemos la ecuación.

$$\frac{1}{5}x + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}x + 10 = x \rightarrow \frac{x}{5} + \frac{12x}{20} + 10 = x \rightarrow \frac{x}{5} + \frac{3x}{5} + 10 = x \rightarrow \frac{x}{5} + \frac{3x}{5} + \frac{50}{5} = \frac{5x}{5} \rightarrow$$

$$\rightarrow x + 3x + 50 = 5x \rightarrow x = 50$$

Tenía ahorrado 50 € .

Recuerda

Ecuaciones incompletas:

■ $ax^2 + bx = 0 \rightarrow$ Extraemos factor común y resolvemos dos ecuaciones de primer grado.

■ $ax^2 + c = 0 \rightarrow$ Despejamos x^2 y resolvemos la raíz cuadrada.

Recuerda

Para resolver $ax^4 + bx^2 + c = 0$:

1. Realizamos un cambio de variable: $x^2 = p$

2. Resolvemos la ecuación de segundo grado $ap^2 + bp + c = 0$.

3. Deshacemos el cambio: $x = \pm \sqrt{p}$

Evaluación B

1. Señala cuáles de estas ecuaciones son equivalentes a $3x + 6 = 2x + 3$.

a) $-2x = 6$

b) $x + 7 = 11$

c) $4x - 1 = 5$

d) $5x - 3 = -18$

Resolvemos la ecuación y vemos cuáles de las ecuaciones tienen esa solución.

$$3x + 6 = 2x + 3 \rightarrow 3x - 2x = 3 - 6 \rightarrow x = -3$$

a) $-2x = 6 \rightarrow x = -3 \rightarrow$ Sí es equivalente.

b) $x + 7 = 11 \rightarrow x = 4 \rightarrow$ No es equivalente.

c) $4x - 1 = 5 \rightarrow 4x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \rightarrow$ No es equivalente.

d) $5x - 3 = -18 \rightarrow 5x = -15 \rightarrow x = -3 \rightarrow$ Sí es equivalente.

Recuerda

Dos ecuaciones de primer grado son equivalentes si tienen la misma solución.

2. Resuelve la siguiente ecuación de primer grado.

$$\frac{2x-3}{5} - \frac{3x-2}{2} - 4 = \frac{x-3}{4} - \frac{2x-6}{5}$$

$$\frac{2x-3}{5} - \frac{3x-2}{2} - 4 = \frac{x-3}{4} - \frac{2x-6}{5}$$

$$\frac{8x-12}{20} - \frac{30x-20}{20} - \frac{80}{20} = \frac{5x-15}{20} - \frac{8x-24}{20}$$

$$8x - 12 - 30x + 20 - 80 = 5x - 15 - 8x + 24$$

$$8x - 30x - 5x + 8x = -15 + 24 + 12 - 20 + 80 \rightarrow -19x = 81 \rightarrow x = -\frac{81}{19}$$

Ten en cuenta

Al eliminar denominadores, un signo $-$ delante de una fracción cambia el signo a todos los términos.

3. Celia ha repartido 100 € entre sus tres hijas. A Nuria le ha dado el doble que a Raquel más 5 € y Ruth ha recibido 10 € menos que el triple de Nuria. ¿Cuánto dinero ha recibido cada una?

Llamamos x al dinero que ha recibido Raquel.

Entonces Nuria habrá recibido $2x + 5$, y Ruth, $3(2x + 5) - 10$.

Planteamos la ecuación y la resolvemos.

$$x + (2x + 5) + 3(2x + 5) - 10 = 100 \rightarrow x + 2x + 5 + 6x + 15 - 10 = 100 \rightarrow 9x = 90 \rightarrow x = 10$$

Raquel recibe 10 €, Nuria $2 \cdot 10 + 5 = 25$ €, y Ruth, $3 \cdot 25 - 10 = 65$ €.

4. Calcula el valor de m en la ecuación $x^2 - mx - 3 = 0$ para que $x = 4$ sea una de sus soluciones.

Sustituimos $x = 4$ en la ecuación y hallamos m .

$$4^2 - m \cdot 4 - 3 = 0 \rightarrow 16 - 4m - 3 = 0 \rightarrow -4m = -13 \rightarrow m = \frac{13}{4}$$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $8x^2 - 6x + 1 = 0$

b) $3x^2 + 2x - 8 = 0$

$$a) \quad 8x^2 - 6x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 1}}{2 \cdot 8} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{16} = \frac{6 \pm 2}{16} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$b) \quad 3x^2 + 2x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{6} = \frac{-2 \pm 10}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ x_2 = \frac{-12}{6} = -2 \end{cases}$$

6. Halla, sin resolverlas, el número de soluciones de estas ecuaciones de segundo grado.

- a) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ c) $x^2 - 6x + 9 = 0$
 b) $x^2 + x + 1 = 0$ d) $3x^2 - 5x + 9 = 0$

Calculamos el discriminante en cada caso.

- a) $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 - 24 = 1 > 0 \rightarrow$ Tiene dos soluciones.
 b) $b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0 \rightarrow$ No tiene solución.
 c) $b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0 \rightarrow$ Tiene una solución doble.
 d) $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9 = 25 - 108 = -83 < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

Recuerda

Dada la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$:

- Si $b^2 - 4ac > 0 \rightarrow$ tiene dos soluciones.
- Si $b^2 - 4ac = 0 \rightarrow$ tiene una solución doble.
- Si $b^2 - 4ac < 0 \rightarrow$ no tiene solución.

7. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas.

- a) $3x^2 - 7x = 0$ b) $4x^2 = 1$ c) $-2x^2 + x = 0$ d) $2x^2 + 8 = 0$

a) $3x^2 - 7x = 0 \rightarrow x(3x - 7) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 7 = 0 \rightarrow x = \frac{7}{3} \end{cases}$

b) $4x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$

c) $-2x^2 + x = 0 \rightarrow x(-2x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$

d) $2x^2 + 8 = 0 \rightarrow 2x^2 = -8 \rightarrow x^2 = -\frac{8}{2} = -4 \rightarrow x = \pm\sqrt{-4} \rightarrow$ No tiene solución.

Recuerda

- La ecuación $ax^2 + bx = 0$ siempre tiene dos soluciones y una de ellas es $x = 0$.
- La ecuación $ax^2 + c = 0$ tiene dos soluciones si a y c tienen el mismo signo; si tienen distinto signo, no hay soluciones.

8. El producto de dos números consecutivos menos el mayor de ellos es igual a 120. Halla los dos números.

Llamamos x y $x + 1$ a los dos números consecutivos. Planteamos y resolvemos la ecuación.

$$x(x + 1) - (x + 1) = 120 \rightarrow x^2 + x - x - 1 = 120 \rightarrow x^2 = 121 \rightarrow x = \pm\sqrt{121} = \pm 11$$

Los números consecutivos pueden ser 11 y 12 o -11 y -10.

9. Resuelve la siguiente ecuación: $x^2(x^2 - 2) = (x + 2)(x - 2) + 8$

$$x^2(x^2 - 2) = (x + 2)(x - 2) + 8 \rightarrow x^4 - 2x^2 = x^2 - 2x - 2x - 4 + 8 \rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Haciendo el cambio de variable $x^2 = p$ tenemos la ecuación de segundo grado $p^2 - 3p - 4 = 0$.

$$p = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} p_1 = 4 \\ p_2 = -1 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variable: $\begin{cases} x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \\ x^2 = -1 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases}$

10. Factoriza y resuelve la siguiente ecuación: $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 9x = 0$

Factorizamos el polinomio: $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 9x = x(x + 1)(x - 3)^2$

Igualamos cada factor a 0 y resolvemos las ecuaciones: $\begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \\ (x - 3)^2 = 0 \rightarrow x = 3 \text{ (solución doble)} \end{cases}$

Evaluación C

1. Comprueba cuál de estos valores es solución de la ecuación $4x - 5 = 3x + 5$.

- a) $x = 8$ b) $x = 10$ c) $x = 3$ d) $x = -2$

Sustituimos cada uno de los valores a ambos lados de la ecuación.

- a) $4 \cdot 8 - 5 = 27$; $3 \cdot 8 + 5 = 29 \rightarrow x = 8$ no es solución de la ecuación.
b) $4 \cdot 10 - 5 = 35$; $3 \cdot 10 + 5 = 35 \rightarrow x = 10$ es solución de la ecuación.
c) $4 \cdot 3 - 5 = 7$; $3 \cdot 3 + 5 = 14 \rightarrow x = 3$ no es solución de la ecuación.
d) $4 \cdot (-2) - 5 = -13$; $3 \cdot (-2) + 5 = -1 \rightarrow x = -2$ no es solución de la ecuación.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado.

- a) $-(4x - 2) + 3(-2 + x) = 2(-3x + 5)$ b) $-5x - (-2x + 1) - 12 = 3(2x - 3) + 5$

a) $-(4x - 2) + 3(-2 + x) = 2(-3x + 5) \rightarrow -4x + 2 - 6 + 3x = -6x + 10 \rightarrow$
 $\rightarrow -4x + 3x + 6x = 10 - 2 + 6 \rightarrow 5x = 14 \rightarrow x = \frac{14}{5}$

b) $-5x - (-2x + 1) - 12 = 3(2x - 3) + 5 \rightarrow -5x + 2x - 1 - 12 = 6x - 9 + 5 \rightarrow$
 $\rightarrow -5x + 2x - 6x = -9 + 5 + 1 + 12 \rightarrow -9x = 9 \rightarrow x = \frac{9}{-9} = -1$

3. Se han comprado 12 balones y 3 bicicletas y se han pagado 1050 €. Calcula el precio de un balón y una bicicleta sabiendo que cada bicicleta vale 200 € más que un balón.

Llamamos x al precio de un balón y $x + 200$ al precio de una bicicleta.

Plantemos y resolvemos la ecuación.

$$12x + 3(x + 200) = 1050 \rightarrow 12x + 3x + 600 = 1050 \rightarrow 15x = 450 \rightarrow x = \frac{450}{15} = 30$$

El balón cuesta 30 € y la bicicleta $30 + 200 = 230$ €.

4. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 3 y 5.

Si las raíces son 3 y 5, los factores son $x - 3$ y $x - 5$.

Multiplicando e igualando a 0 tenemos:

$$(x - 3)(x - 5) = 0 \rightarrow x^2 - 5x - 3x + 15 = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones.

- a) $(2x - 1)(x + 3) - (x + 1)^2 = 0$ b) $(2x - 3)(3x - 1) - (2 - x)(3 + x) = -3$

a) $(2x - 1)(x + 3) - (x + 1)^2 = 0 \rightarrow 2x^2 + 6x - x - 3 - x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-8}{2} = -4 \end{cases}$

b) $(2x - 3)(3x - 1) - (2 - x)(3 + x) = -3 \rightarrow 6x^2 - 2x - 9x + 3 - 6 - 2x + 3x + x^2 = -3 \rightarrow$
 $\rightarrow 7x^2 - 10x = 0 \rightarrow x(7x - 10) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 7x - 10 = 0 \rightarrow x = \frac{10}{7} \end{cases}$

6. Halla las soluciones de estas ecuaciones.

a) $3x(x-3) = 5x^2 - 2(x+4) - 7x$

b) $2x(1-x) = (x+1)^2 + 3x - 1$

a) $3x(x-3) = 5x^2 - 2(x+4) - 7x \rightarrow 3x^2 - 9x = 5x^2 - 2x - 8 - 7x \rightarrow -2x^2 = -8 \rightarrow$
 $\rightarrow x^2 = \frac{-8}{-2} = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

b) $2x(1-x) = (x+1)^2 + 3x - 1 \rightarrow 2x - 2x^2 = x^2 + 2x + 1 + 3x - 1 \rightarrow 3x^2 + 3x = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow 3x(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$

7. Calcula la medida de los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que son tres números consecutivos.

Llamamos x , $x+1$ y $x+2$ a los lados del triángulo, siendo $x+2$ la hipotenusa por ser el lado más largo. Aplicamos el teorema de Pitágoras y resolvemos la ecuación.

$$(x+2)^2 = (x+1)^2 + x^2 \rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2x + 1 + x^2 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Al ser una longitud, nos quedamos con la solución positiva $x = 3$. Luego los lados miden 3, 4 y 5.

8. Resuelve la ecuación $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$.

Como es una ecuación bicuadrada, hacemos el cambio de variable $x^2 = p$.

$$4p^2 - 37p + 9 = 0 \rightarrow p = \frac{37 \pm \sqrt{(-37)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{37 \pm \sqrt{1369 - 144}}{8} = \frac{37 \pm 35}{8} \rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{72}{8} = 9 \\ p_2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variable: $\begin{cases} x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \\ x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$

9. Halla las soluciones de la ecuación $2x + 3x^3 - 11x - 6x = 0$.

Factorizamos el polinomio: $2x^4 + 3x^3 - 11x^2 - 6x = x(x-2)(x+3)(2x+1) = 0$

Igualamos a 0 cada factor y resolvemos las ecuaciones: $\begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \\ x + 3 = 0 \rightarrow x = -3 \\ 2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

10. En una clase, la mitad de los alumnos cursan Ampliación de Matemáticas, $\frac{1}{3}$ de los que quedan, Francés, y los 20 restantes, Cultura Clásica. ¿Cuántos alumnos hay en total?

Llamamos x al total de alumnos: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}x + 20 = x \rightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{6} + 20 = x \rightarrow \frac{3x}{6} + \frac{x}{6} + \frac{120}{6} = \frac{6x}{6} \rightarrow$

$\rightarrow 3x + x + 120 = 6x \rightarrow 2x = 120 \rightarrow x = \frac{120}{2} = 60$ Hay 60 alumnos en 3.º de ESO.

Evaluación D

1. Escribe dos ecuaciones equivalentes a $3x - 1 = \frac{x}{2} + 14$.

Resolvemos la ecuación: $3x - 1 = \frac{x}{2} + 14 \rightarrow \frac{6x - 2}{2} = \frac{x}{2} + \frac{28}{2} \rightarrow 6x - 2 = x + 28 \rightarrow 5x = 30 \rightarrow x = 6$

Cualquier ecuación que tenga como solución $x = 6$ es equivalente a la dada.

Por ejemplo, $x + 1 = 7$ o $2x = 12$.

2. Resuelve la siguiente ecuación: $\frac{3x - 2}{5} - \frac{2x + 3}{3} + 4 = \frac{-2(x + 3)}{10} - \frac{-x + 2}{4}$

$$\frac{3x - 2}{5} - \frac{2x + 3}{3} + 4 = \frac{-2(x + 3)}{10} - \frac{-x + 2}{4} \rightarrow \frac{36x - 24}{60} - \frac{40x + 60}{60} + \frac{240}{60} = \frac{-12x - 36}{60} - \frac{-15x + 30}{60} \rightarrow$$

$$\rightarrow 36x - 24 - 40x - 60 + 240 = -12x - 36 + 15x - 30 \rightarrow 36x - 40x + 12x - 15x =$$

$$= -36 - 30 + 24 + 60 - 240 \rightarrow -7x = -222 \rightarrow x = \frac{222}{7}$$

3. Hace 3 años la edad de David era el triple de la de Elena y dentro de 3 años será el doble. ¿Qué edad tiene cada uno?

	Hace 3 años	Hoy	Dentro de 3 años
Elena	x	$x + 3$	$x + 6$
David	$3x$	$3x + 3$	$3x + 6$

Planteamos y resolvemos la ecuación.

$$3x + 6 = 2(x + 6) \rightarrow 3x + 6 = 2x + 12 \rightarrow 3x - 2x = 12 - 6 \rightarrow x = 6$$

En la actualidad, Elena tiene $6 + 3 = 9$ años, y David, $3 \cdot 6 + 3 = 21$.

4. Halla los valores de m en la ecuación $3x^2 + mx + 3 = 0$ para que tenga una única solución.

Para que una ecuación de segundo grado tenga solo una solución tiene que cumplirse que el discriminante sea igual a 0, es decir, $b^2 - 4ac = 0$.

$$\text{En nuestra ecuación: } m^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 0 \rightarrow m^2 - 36 = 0 \rightarrow m = \pm\sqrt{36} = \pm 6$$

Para que la ecuación tenga una única solución, $m = \pm 6$.

5. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $(2x + 1)^2 = 2(-4x - 4)$

b) $\frac{x^2 + 3}{2} + \frac{3x + 1}{3} = \frac{x^2 + 8x - 7}{3}$

a) $(2x + 1)^2 = 2(-4x - 4) \rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = -8x - 8 \rightarrow 4x^2 + 12x + 9 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} = \frac{-12}{8} = \frac{-3}{2} \text{ (solución doble)}$$

b) $\frac{x^2 + 3}{2} + \frac{3x + 1}{3} = \frac{x^2 + 8x - 7}{3} \rightarrow \frac{3x^2 + 9}{6} + \frac{6x + 2}{6} = \frac{2x^2 + 16x - 14}{6} \rightarrow 3x^2 + 9 + 6x + 2 =$

$$= 2x^2 + 16x - 14 \rightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} =$$

$$= \frac{10}{2} = 5 \text{ (solución doble)}$$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $(2x - 2)^2 - (x - 2)^2 = 0$

b) $(1 - 3x)^2 + 3(2x + 4) = 13$

a) $(2x - 2)^2 - (x - 2)^2 = 0 \rightarrow 4x^2 - 8x + 4 - x^2 + 4x - 4 = 0 \rightarrow 3x^2 - 4x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x(3x - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

b) $(1 - 3x)^2 + 3(2x + 4) = 13 \rightarrow 1 - 6x + 9x^2 + 6x + 12 = 13 \rightarrow 9x^2 = 0 \rightarrow x = 0$ (solución doble)

7. El perímetro de un rectángulo es 92 cm. Si aumentamos la altura 2 cm y disminuimos la base 4 cm, el área del nuevo rectángulo se reduce 24 cm². ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

La suma de la base y la altura es la mitad del perímetro: $92 : 2 = 46$ cm

Entonces, si llamamos x a la base, la altura sería $46 - x$.

El área del primer rectángulo es $x(46 - x)$, y la del segundo, $(x - 4)(48 - x)$.

Planteamos y resolvemos la ecuación.

$$x(46 - x) = (x - 4)(48 - x) + 24 \rightarrow 46x - x^2 = 48x - x^2 - 192 + 4x + 24 \rightarrow 6x = 168 \rightarrow x = \frac{168}{6} = 28$$

La base del nuevo rectángulo mide 24 cm, y la altura, 20 cm.

8. Resuelve la ecuación bicuadrada $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$.

Haciendo el cambio de variable $x^2 = p$ obtenemos la ecuación de segundo grado $p^2 + 3p + 2 = 0$.

$$p = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{-2}{2} = -1 \\ p_2 = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

$$\text{Deshaciendo el cambio de variable: } \begin{cases} x^2 = -1 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \rightarrow \text{No tiene solución.} \\ x^2 = -2 \rightarrow x = \pm\sqrt{-2} \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases}$$

9. Escribe una ecuación de cuarto grado que tenga como soluciones $x = -3$, $x = 0$ y $x = 2$ como solución doble.

Los factores de la ecuación son $(x - 2)^2$, $x + 3$ y x .

Operamos y simplificamos.

$$(x - 2)^2 (x + 3)x = 0 \rightarrow (x^2 - 4x + 4)(x^2 + 3x) = 0 \rightarrow x^4 + 3x^3 - 4x^3 - 12x^2 + 4x^2 + 12x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^4 - x^3 - 8x^2 + 12x = 0$$

10. Un vehículo sale de Tobed a las 10 de la mañana a una velocidad constante de 80 km/h y 2 horas después, en la misma dirección, sale una moto a 110 km/h. ¿A qué hora le alcanzará?

Llamamos x al tiempo que transcurre desde que sale el vehículo hasta que se encuentran.

Planteamos y resolvemos la ecuación.

$$80x = 110(x - 2) \rightarrow 80x = 110x - 220 \rightarrow -30x = -220 \rightarrow x = \frac{-220}{-30} = 7,3 \text{ h} = 7 \text{ h } 20 \text{ min}$$

Le alcanzará a las 17:20 horas.

SISTEMAS DE ECUACIONES

Evaluación A

1. Determina cuáles de estos pares de números son solución de la siguiente ecuación lineal: $3x + 2y = 7$

a) $x = 1, y = 2$

b) $x = 2, y = 1$

c) $x = 3, y = -1$

d) $x = -1, y = 5$

Sustituimos los valores de las incógnitas en cada ecuación y comprobamos si se cumple la igualdad.

a) $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7 \rightarrow$ Sí son solución.

c) $3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = 7 \rightarrow$ Sí son solución.

b) $3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8 \neq 7 \rightarrow$ No son solución.

d) $3 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 = 7 \rightarrow$ Sí son solución.

2. Clasifica estos sistemas en compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

a)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -4x - 6y = -10 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 9x - 3y = 7 \end{cases}$$

a)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -4x - 6y = -10 \end{cases} \rightarrow \frac{2}{-4} = \frac{3}{-6} = \frac{5}{-10} \rightarrow \text{Compatible indeterminado}$$

b)
$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 9x - 3y = 7 \end{cases} \rightarrow \frac{3}{9} = \frac{-1}{-3} \neq \frac{2}{7} \rightarrow \text{Incompatible}$$

Recuerda

Dado el sistema:
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Si $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \rightarrow$ Compatible determinado

Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \rightarrow$ Compatible indeterminado

Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \rightarrow$ Incompatible

3. Resuelve el sistema
$$\begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ x + 3y = -11 \end{cases}$$
 mediante el método de sustitución.

Despejamos x en la segunda ecuación: $x = -11 - 3y$

Sustituimos esa expresión en la primera ecuación y resolvemos.

$$2 \cdot (-11 - 3y) - 5y = 11 \rightarrow -22 - 6y - 5y = 11 \rightarrow -11y = 33 \rightarrow y = -3$$

Sustituimos el valor hallado en la expresión del primer paso para hallar x .

$$x = -11 - 3 \cdot (-3) = -11 + 9 = -2. \text{ Por tanto, la solución es: } x = -2, y = -3$$

Ten en cuenta

Método de sustitución: se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y esa expresión se sustituye en la otra ecuación.

4. Resuelve el sistema
$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$$
 mediante el método de igualación.

Despejamos y en las dos ecuaciones: $y = 11 - 2x, y = 3x - 9$

Igualamos y resolvemos: $11 - 2x = 3x - 9 \rightarrow -5x = -20 \rightarrow x = 4$

Sustituimos el valor hallado en cualquiera de las expresiones iniciales.

$$y = 11 - 2 \cdot 4 = 3. \text{ Por tanto, la solución es: } x = 4, y = 3$$

Ten en cuenta

Método de igualación: se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y se igualan las expresiones.

5. Resuelve el sistema
$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 4x + 3y = -7 \end{cases}$$
 mediante el método de reducción.

Multiplicamos la primera ecuación por 2 para igualar coeficientes.

$$2x + y = -1 \xrightarrow{\cdot 2} 4x + 2y = -2$$

Restamos las ecuaciones y resolvemos la ecuación de primer grado para hallar y .

$$\begin{cases} 4x + 2y = -2 \\ -4x - 3y = 7 \end{cases} \rightarrow -y = 5 \rightarrow y = -5$$

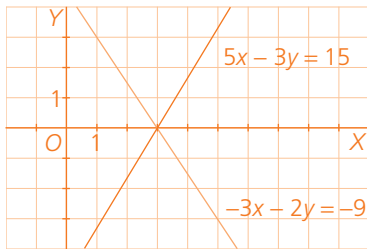
Sustituimos el valor obtenido en una de las ecuaciones iniciales y hallamos el valor de x .

$$2x - 5 = -1 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2. \text{ Por tanto, la solución es: } x = 2, y = -5$$

Ten en cuenta

Método de reducción: se multiplican una o ambas ecuaciones por un número para igualar los coeficientes de una de las incógnitas.

6. Resuelve el sistema $\begin{cases} 5x - 3y = 15 \\ -3x - 2y = -9 \end{cases}$ mediante el método gráfico.



Se observa en el dibujo que la solución es: $x = 3, y = 0$

Ten en cuenta

Método gráfico: se representan las dos ecuaciones y se observan gráficamente los puntos de corte.

7. Simplifica el siguiente sistema y resuélvelo por el método que consideres más conveniente.

$$\begin{cases} 5x - 4y + 1 = 3(x + y) \\ 2x + 2(x - y + 1) + y - 1 = 2x + 3(y + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 4y + 1 = 3(x + y) \\ 2x + 2(x - y + 1) + y - 1 = 2x + 3(y + 1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x - 4y + 1 = 3x + 3y \\ 2x + 2x - 2y + 2 + y - 1 = 2x + 3y + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 7y = -1 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$$

Como los coeficientes de la incógnita x son iguales, elegimos resolver por el método de reducción.

$$\begin{cases} 2x - 7y = -1 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases} \rightarrow -3y = -3 \rightarrow y = 1$$

$$2x - 7 \cdot 1 = -1 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3$$

Por tanto, la solución es: $x = 3, y = 1$

8. Mikel ha pagado 13 € por 2 kg de manzanas y 3 kg de naranjas, y Claudia ha pagado 11 € por 4 kg de manzanas y 1 kg de naranjas. ¿Cuánto cuesta el kilo de cada fruta?

Sean x el precio de un kilo de manzanas e y el de un kilo de naranjas.

El sistema que planteamos es: $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$

Resolviéndolo por cualquier método, la solución es: $x = 2, y = 3$

Por tanto, las manzanas cuestan 2 €/kg, y las naranjas, 3 €/kg.

9. Tenemos 27 billetes mezclados de 10 € y 20 €, en total, suman 420 €. ¿Cuántos billetes hay de cada tipo?

Sean x el número de billetes de 10 € e y el número de billetes de 20 €.

El sistema que planteamos es: $\begin{cases} x + y = 27 \\ 10x + 20y = 420 \end{cases}$

Resolviéndolo por cualquier método, la solución es: $x = 12, y = 15$

Por tanto, hay 12 billetes de 10 € y 15 billetes de 20 €.

10. Se mezclan varios kilos de azúcar de 3 €/kg con otros varios kilos de 5 €/kg. Se consigue una mezcla de 20 kg que se vende a 4,20 €/kg. ¿Qué cantidad de azúcar de cada tipo se ha mezclado?

Sean x los kilos de azúcar de 3 €/kg e y los kilos de azúcar de 5 €/kg.

Planteamos el sistema: $\begin{cases} x + y = 20 \\ 3x + 5y = 84 \end{cases}$

Resolviéndolo por cualquier método, la solución es: $x = 8, y = 12$

Por tanto, se mezclan 8 kg de azúcar de 3 €/kg con 12 kg de azúcar de 5 €/kg.

Ten en cuenta

	kg	€/kg	Precio
Azúcar 3 €/kg	x	3	$3x$
Azúcar 5 €/kg	y	5	$5y$
Mezcla	20	4,20	84

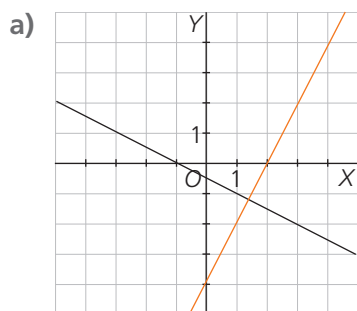
Evaluación B

1. Halla el valor de a y b en el sistema $\begin{cases} 2x - ay = 6 \\ bx + 2y = -1 \end{cases}$ para que el par de números $x = 5, y = 1$ sea solución.

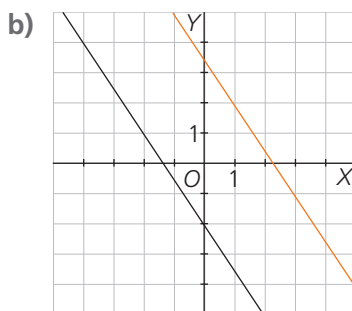
Sustituimos los valores $x = 5, y = 1$ en el sistema, y resolvemos las dos ecuaciones resultantes.

$$\begin{cases} 2 \cdot 5 - a \cdot 1 = 6 \rightarrow 10 - a = 6 \rightarrow -a = -4 \rightarrow a = 4 \\ b \cdot 5 + 2 \cdot 1 = -1 \rightarrow 5b + 2 = -1 \rightarrow 5b = -3 \rightarrow b = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

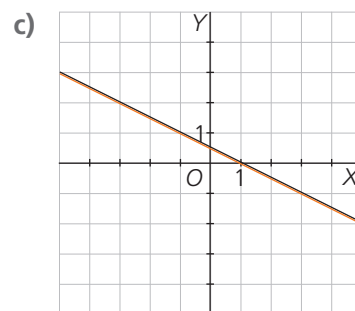
2. Estas representaciones gráficas corresponden a sistemas de ecuaciones. Indica si son compatibles determinados, compatibles indeterminados o incompatibles.



a) Compatible determinado



b) Incompatible



c) Compatible indeterminado

3. Resuelve el siguiente sistema mediante el método de sustitución: $\begin{cases} x + y = 0 \\ 6x - 7y = 39 \end{cases}$

Despejamos x en la primera ecuación: $x = -y$

Sustituimos el valor de x en la segunda ecuación y resolvemos.

$$6 \cdot (-y) - 7y = 39 \rightarrow -6y - 7y = 39 \rightarrow -13y = 39 \rightarrow y = -3$$

Sustituimos el valor hallado en la expresión que hemos despejado en el primer paso para hallar x : $x = -(-3) = 3$

Por tanto, la solución es: $x = 3, y = -3$

4. Resuelve el siguiente sistema mediante el método de igualación: $\begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ -5x + 6y = 78 \end{cases}$

Despejamos x en las dos ecuaciones: $x = \frac{-2 - 2y}{3}, x = \frac{78 - 6y}{-5}$

$$\text{Igualamos y resolvemos: } \frac{-2 - 2y}{3} = \frac{78 - 6y}{-5} \rightarrow 10 + 10y = 234 - 18y \rightarrow 28y = 224 \rightarrow y = 8$$

Sustituimos el valor hallado en cualquiera de las expresiones iniciales: $x = \frac{-2 - 2 \cdot 8}{3} = \frac{-2 - 16}{3} = -6$

Por tanto, la solución es: $x = -6, y = 8$

5. Resuelve el siguiente sistema mediante el método de reducción: $\begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ 7x + 2y = 12 \end{cases}$

Multiplicamos la primera ecuación por 7 y la segunda por 4 para igualar coeficientes.

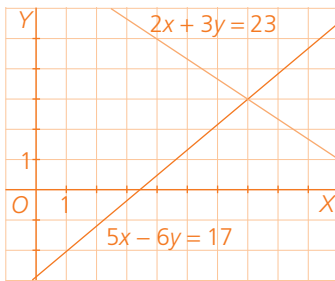
$$\begin{cases} 4x + 3y = 11 \xrightarrow{\cdot 7} 28x + 21y = 77 \\ 7x + 2y = 12 \xrightarrow{\cdot 4} 28x + 8y = 48 \end{cases}$$

Restamos las ecuaciones y resolvemos para hallar y : $\begin{cases} 28x + 21y = 77 \\ -28x - 8y = -48 \end{cases} \rightarrow 13y = 29 \rightarrow y = \frac{29}{13}$

Sustituimos el valor obtenido en una de las ecuaciones iniciales y hallamos x .

$$4x + 3 \cdot \frac{29}{13} = 11 \rightarrow 4x = \frac{56}{13} \rightarrow x = \frac{14}{13}. \text{ Por tanto, la solución es: } x = \frac{14}{13}, y = \frac{29}{13}$$

6. Resuelve el sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 23 \\ 5x - 6y = 17 \end{cases}$ mediante el método gráfico.



Se observa en el dibujo que la solución es: $x = 7, y = 3$

7. Simplifica el sistema $\begin{cases} \frac{-x+6}{2} + \frac{y+2}{3} = 4 \\ \frac{x+2}{4} + \frac{y-4}{3} = 1 \end{cases}$ y resuélvelo por el método que consideres más conveniente.

$$\left. \begin{cases} \frac{-x+6}{2} + \frac{y+2}{3} = 4 \\ \frac{x+2}{4} + \frac{y-4}{3} = 1 \end{cases} \right\} \rightarrow \begin{cases} -3x+18+2y+4=24 \\ 3x+6+4y-16=12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3x+2y=2 \\ 3x+4y=22 \end{cases}$$

Ten en cuenta

Una vez simplificado el sistema, razona cuál de los métodos es más conveniente utilizar.

Al tener dos coeficientes opuestos, resolvemos por el método de reducción sumando las ecuaciones.

$$\left. \begin{cases} -3x+2y=2 \\ 3x+4y=22 \end{cases} \right\} \rightarrow 6y=24 \rightarrow y=4 \quad -3x+2 \cdot 4=2 \rightarrow -3x=-6 \rightarrow x=2$$

Por tanto, la solución es: $x = 2, y = 4$

8. En una granja hay cerdos y gallinas; en total 40 cabezas y 108 patas. ¿Cuántos cerdos y gallinas son?

Sean x el número de gallinas e y el número de cerdos. El sistema que planteamos es: $\begin{cases} x + y = 40 \\ 2x + 4y = 108 \end{cases}$

Resolviéndolo por cualquier método, la solución es: $x = 26, y = 14$

Por tanto, hay 14 cerdos y 26 gallinas.

9. Halla dos números sabiendo que su diferencia es 12 y que, si aumentamos 14 unidades al mayor, obtenemos el triple del menor.

Sean x el número mayor e y el número menor. El sistema que planteamos es: $\begin{cases} x - y = 12 \\ x + 14 = 3y \end{cases}$

Resolviéndolo por cualquier método, la solución es: $x = 25, y = 13$

Por tanto, los números son 25 y 13.

10. Las dos cifras de un número suman 10. Si invertimos el orden de las cifras el número resultante es 36 unidades mayor. Halla el número.

Sean x la cifra de las unidades e y la de las decenas. El número pedido es de la forma yx . Si invertimos el orden de las cifras tendríamos el número xy , que es igual a $10x + y$.

Ten en cuenta

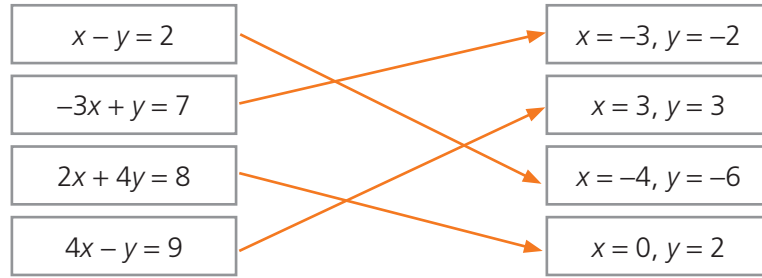
Si escribimos un número ab en función de sus cifras: $ab = 10a + b$

$$\text{Por lo tanto, el sistema que obtenemos es: } \left. \begin{cases} x + y = 10 \\ 10x + y = 10y + x + 36 \end{cases} \right\} \rightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ 9x - 9y = 36 \end{cases}$$

Resolviéndolo por cualquier método, la solución es: $x = 7, y = 3$. Por tanto, el número pedido es el 37.

Evaluación C

1. Relaciona cada ecuación lineal con su solución correspondiente.



2. Clasifica los siguientes sistemas en compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

a)
$$\begin{cases} -x + 2y = 5 \\ 4x - 8y = -20 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 6x - y = 12 \end{cases}$$

a)
$$\begin{cases} -x + 2y = 5 \\ 4x - 8y = -20 \end{cases} \rightarrow \frac{-1}{4} = \frac{2}{-8} = \frac{5}{-20}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 6x - y = 12 \end{cases} \rightarrow \frac{2}{6} \neq \frac{3}{-1}$$

Sistema compatible indeterminado

Sistema compatible determinado

3. Resuelve este sistema mediante el método de sustitución:
$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x + 2y = -2 \end{cases}$$

Despejamos x en la primera ecuación: $x = \frac{8 - 3y}{2}$

Sustituimos la expresión en la segunda ecuación, y resolvemos.

$$5 \cdot \left(\frac{8 - 3y}{2} \right) + 2y = -2 \rightarrow \frac{40 - 15y}{2} + 2y = -2 \rightarrow 40 - 15y + 4y = -4 \rightarrow -11y = -44 \rightarrow y = 4$$

Sustituimos el valor de y hallado en la expresión que hemos despejado en el primer paso para hallar x .

$$x = \frac{8 - 3 \cdot 4}{2} = \frac{8 - 12}{2} = -\frac{4}{2} = -2. \text{ Por tanto, la solución es: } x = -2, y = 4$$

4. Resuelve el siguiente sistema mediante el método de igualación:
$$\begin{cases} -7x + 3y = -9 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases}$$

Despejamos y en las dos ecuaciones: $y = \frac{-9 + 7x}{3}$, $y = \frac{23 - 5x}{2}$

$$\text{Igualamos y resolvemos: } \frac{-9 + 7x}{3} = \frac{23 - 5x}{2} \rightarrow -18 + 14x = 69 - 15x \rightarrow 29x = 87 \rightarrow x = 3$$

$$\text{Sustituimos el valor hallado en cualquiera de las expresiones iniciales: } y = \frac{-9 + 7 \cdot 3}{3} = \frac{-9 + 21}{3} = 4$$

Por tanto, la solución es: $x = 3, y = 4$

5. Resuelve el siguiente sistema mediante el método de reducción:
$$\begin{cases} 6x - y = 3 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$$

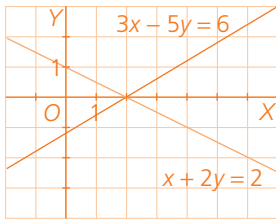
Multiplicamos la primera ecuación por 3 para igualar coeficientes: $6x - y = 3 \xrightarrow{\cdot 3} 18x - 3y = 9$

$$\text{Sumamos las ecuaciones y resolvemos para hallar } x: \begin{cases} 18x - 3y = 9 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases} \rightarrow 22x = 22 \rightarrow x = 1$$

Sustituimos el valor obtenido en una de las ecuaciones iniciales: $6 \cdot 1 - y = 3 \rightarrow y = 6 - 3 = 3$

Por tanto, la solución es: $x = 1, y = 3$

6. Resuelve el sistema $\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ mediante el método gráfico.



Se observa en el dibujo que la solución es: $x = 2, y = 0$

7. Simplifica el sistema $\begin{cases} \frac{x-2}{4} - \frac{3(y-1)}{4} = -4 \\ 3(x-3) = 5y-4 \end{cases}$ y resuélvelo por el método más conveniente.

$$\left. \begin{aligned} \frac{x-2}{4} - \frac{3(y-1)}{4} = -4 \\ 3(x-3) = 5y-4 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{x-2}{4} - \frac{3y-3}{4} = \frac{-16}{4} \\ 3x-9 = 5y-4 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} x-2-3y+3 = -16 \\ 3x-9 = 5y-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-3y = -17 \\ 3x-5y = 5 \end{cases}$$

En la primera ecuación es fácil despejar x , por lo que resolvemos el sistema por el método de sustitución.

Despejamos x en la primera ecuación: $x = 3y - 17$

Sustituimos en la segunda ecuación y resolvemos: $3(3y - 17) - 5y = 5 \rightarrow 9y - 51 - 5y = 5 \rightarrow y = 14$

Sustituimos el valor hallado de y en la expresión del primer paso para hallar x .

$$x = 3 \cdot 14 - 17 = 25$$

Por tanto, la solución es: $x = 25, y = 14$

8. En un hotel hay 100 habitaciones entre dobles y triples. Si en total hay 225 camas, ¿cuántas habitaciones hay de cada tipo?

Sean x el número de habitaciones dobles e y el de habitaciones triples. El sistema es: $\begin{cases} x + y = 100 \\ 2x + 3y = 225 \end{cases}$

Resolviéndolo por cualquier método, la solución es: $x = 75, y = 25$

Por tanto, el hotel tiene 75 habitaciones dobles y 25 habitaciones triples.

9. Se han pagado 29 € por 6 bocadillos y 4 refrescos, y 20 € por 4 bocadillos y 3 refrescos. ¿Cuál es el precio del bocadillo y del refresco, si cada bocadillo tiene el mismo precio y cada refresco cuesta lo mismo?

Sean x el precio del bocadillo e y el del refresco. El sistema que obtenemos es: $\begin{cases} 6x + 4y = 29 \\ 4x + 3y = 20 \end{cases}$

Resolviéndolo por cualquier método, la solución es: $x = 3,5; y = 2$

Por tanto, cada bocadillo cuesta 3,50 €, y cada refresco, 2 €.

10. Dentro de tres años la suma de las edades de un padre y su hija será 52 años. Hace 4 años la edad del padre era 18 veces más que la de su hija. ¿Qué edad tiene cada uno?

Sean x la edad del padre e y la de la hija.

$$\left. \begin{aligned} x + 3 + y + 3 = 52 \\ x - 4 = 18(y - 4) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} x + y = 46 \\ x - 18y = -68 \end{cases}$$

	Hace 4 años	Hoy	Dentro de 3 años
Edad del padre	$x - 4$	x	$x + 3$
Edad de la hija	$y - 4$	y	$y + 3$

Resolviéndolo por cualquier método, la solución es: $x = 40, y = 6$

Por tanto, el padre tiene 40 años y su hija 6 años.

Evaluación D

1. Halla el valor de a y b en el siguiente sistema de ecuaciones para que el par de números $x = 1, y = 2$ sea solución de este sistema:

$$\begin{cases} 3x + ay = 5 \\ -bx + 2y = 3 \end{cases}$$

Sustituimos los valores $x = 1, y = 2$ en la ecuación y resolvemos las dos ecuaciones de primer grado con

incógnitas a y b :
$$\begin{cases} 3 \cdot 1 + a \cdot 2 = 5 \rightarrow -3 + 2a = 5 \rightarrow 2a = 8 \rightarrow a = 4 \\ -b \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 3 \rightarrow b + 4 = 3 \rightarrow b = -1 \end{cases}$$

2. Halla p y q para que los siguientes sistemas sean compatibles indeterminados.

a)
$$\begin{cases} 4x - y = -3 \\ px + 3y = q \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} -2x + py = 3 \\ qx + 12y = 12 \end{cases}$$

- a) Para que el sistema $\begin{cases} 4x - y = -3 \\ px + 3y = q \end{cases}$ sea compatible indeterminado, se tiene que cumplir $\frac{4}{p} = \frac{-1}{3} = \frac{-3}{q}$ y esto se produce cuando $p = -12$ y $q = 9$.

- b) Para que el sistema $\begin{cases} -2x + py = 3 \\ qx + 12y = 12 \end{cases}$ sea compatible indeterminado, se tiene que cumplir $\frac{-2}{q} = \frac{p}{12} = \frac{3}{12}$ y esto se produce cuando $p = 3$ y $q = -8$.

3. Resuelve el siguiente sistema mediante el método de sustitución:
$$\begin{cases} 2x + 2y = -3 \\ 6x + 7y = -10 \end{cases}$$

Despejamos x en la primera ecuación: $x = \frac{-3 - 2y}{2}$

Sustituimos en la segunda ecuación y resolvemos:

$$6\left(\frac{-3 - 2y}{2}\right) + 7y = -10 \rightarrow \frac{-18 - 12y}{2} + 7y = -10 \rightarrow -9 - 6y + 7y = -10 \rightarrow y = -1$$

Sustituimos el valor hallado en la expresión que hemos despejado en el primer paso para hallar x .

$$x = \frac{-3 - 2 \cdot (-1)}{2} = \frac{-3 + 2}{2} = -\frac{1}{2}. \text{ Por tanto, la solución es: } x = -\frac{1}{2}, y = -1$$

4. Resuelve el siguiente sistema mediante el método de igualación:
$$\begin{cases} 3x - y = 10 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$$

Despejamos y en las dos ecuaciones: $y = 3x - 10, y = 11 - 4x$

Igualamos las expresiones obtenidas y resolvemos para hallar x : $3x - 10 = 11 - 4x \rightarrow 7x = 21 \rightarrow x = 3$

Sustituimos el valor hallado en cualquiera de las expresiones iniciales: $y = 3 \cdot 3 - 10 = -1$

Por tanto, la solución es: $x = 3, y = -1$

5. Resuelve el siguiente sistema mediante el método de reducción:
$$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ 7x - y = 55 \end{cases}$$

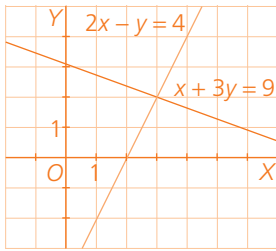
Multiplicamos la segunda ecuación por 3 para igualar coeficientes: $7x - y = 55 \xrightarrow{\cdot 3} 21x - 3y = 165$

Sumamos las ecuaciones y resolvemos para hallar x :
$$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ 21x - 3y = 165 \end{cases} \rightarrow 23x = 184 \rightarrow x = 8$$

Sustituimos el valor obtenido en una de las ecuaciones iniciales y hallamos el valor de y .

$2 \cdot 8 + 3y = 19 \rightarrow 16 + 3y = 19 \rightarrow 3y = 3 \rightarrow y = 1$. Por tanto, la solución es: $x = 8, y = 1$

6. Resuelve el siguiente sistema mediante el método gráfico: $\begin{cases} x + 3y = 9 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$



Se observa en el dibujo que la solución es: $x = 3, y = 2$

7. Simplifica el siguiente sistema y resuélvelo por el método que consideres más conveniente.

$$\begin{cases} -3(y - 2) = 2(x - y) - 3(x + y) \\ 5(y - 1) - 2(-3 - 2x) = 3y + 2x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3(y - 2) = 2(x - y) - 3(x + y) \\ 5(y - 1) - 2(-3 - 2x) = 3y + 2x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3y + 6 = 2x - 2y - 3x - 3y \\ 5y - 5 + 6 + 4x = 3y + 2x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = -6 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Como los coeficientes de la y son iguales, resolvemos por el método de reducción restando las ecuaciones.

$$\begin{cases} x + 2y = -6 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow -x = -6 \rightarrow x = 6$$

$$6 + 2y = -6 \rightarrow 2y = -12 \rightarrow y = -6$$

Por tanto, la solución es: $x = 6, y = -6$

8. Se mezcla café de 12 €/kg con café de 7 €/kg para obtener una mezcla de 40 kg a 9 €/kg. ¿Cuánto café se ha mezclado de cada clase?

Sean x los kilos de café de 12 €/kg e y los kilos de café de 7 €/kg.

Con la ayuda de la tabla el sistema que obtenemos es: $\begin{cases} x + y = 40 \\ 12x + 7y = 360 \end{cases}$

Resolviéndolo por cualquier método, la solución es: $x = 16, y = 24$

Por tanto, habrá que mezclar 16 kg de café de 12 €/kg con 24 kg de café de 7 €/kg.

	kg	€/kg	Precio
Café 12 €/kg	x	12	$12x$
Café 7 €/kg	y	7	$7y$
Mezcla	40	9	360

9. En una tienda, 4 raquetas y 3 balones cuestan 160 €. Si nos descuentan un 20 % en el precio de las raquetas y un 50 % en el precio de los balones, pagamos 110 €. ¿Cuál es el precio de una raqueta y un balón?

Sean x el precio de raqueta e y el del balón. Teniendo en cuenta que si nos hacen un descuento del 20 % estamos pagando un 80 %, y si nos descuentan un 50 % pagamos un 50 %, el sistema es:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 160 \\ 0,8 \cdot 4x + 0,5 \cdot 3y = 110 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 160 \\ 3,2x + 1,5y = 110 \end{cases}$$

Podemos multiplicar por 10 la segunda ecuación para eliminar los decimales: $\begin{cases} 4x + 3y = 160 \\ 32x + 15y = 1100 \end{cases}$ Resolviéndolo por cualquier método la solución es: $x = 25, y = 20$

Por tanto, cada raqueta cuesta 25 € y cada balón 20 €.

10. Halla dos números tales que el triple del primero más el doble del segundo suman 55, y la diferencia entre los dos es de 5 unidades.

Sean x el primer número e y el segundo. El sistema que obtenemos es: $\begin{cases} 3x + 2y = 55 \\ x - y = 5 \end{cases}$

Resolviéndolo por cualquier método, la solución es $x = 13, y = 8$. Por tanto, los números pedidos son 13 y 8.

SUCESIONES

Evaluación A

1. Escribe los cinco siguientes términos de las siguientes sucesiones.

a) 3, 6, 12, 24, $\boxed{48}$, $\boxed{96}$, $\boxed{192}$, $\boxed{384}$, $\boxed{768}$

c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{\boxed{5}}{\boxed{6}}, \frac{\boxed{6}}{\boxed{7}}, \frac{\boxed{7}}{\boxed{8}}, \frac{\boxed{8}}{\boxed{9}}, \frac{\boxed{9}}{\boxed{10}}$

b) 2, 3, 5, 8, $\boxed{13}$, $\boxed{21}$, $\boxed{34}$, $\boxed{55}$, $\boxed{89}$

d) 7, 3, -1, -5, -9, $\boxed{-13}$, $\boxed{-17}$, $\boxed{-21}$, $\boxed{-25}$, $\boxed{-29}$

2. Encuentra el término general estas sucesiones.

a) 1, 4, 9, 16, 25, ... b) $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots$ c) 5, 10, 15, 20, 25, ... d) 1, 3, 9, 27, 81, ...

a) Los términos de esta sucesión son los cuadrados de los números naturales. Entonces, $a_n = n^2$.

b) El numerador es el número del término más 2, y el denominador, más 1. Luego, $b_n = \frac{n+2}{n+1}$.

c) Los términos de esta sucesión son los múltiplos de 5. Entonces, $c_n = 5n$.

d) Los términos de esta sucesión son las potencias de 3 empezando con exponente 0. Luego, $d_n = 3^{n-1}$.

3. Clasifica las siguientes progresiones en aritméticas o geométricas, e indica la diferencia o la razón en cada caso.

a) 7, 11, 15, 19, 23, ... c) $\frac{2}{5}, \frac{11}{15}, \frac{16}{15}, \frac{7}{5}, \dots$

b) -4, 8, -16, 32, -64, ... d) 32, 16, 8, 4, 2, ...

a) Progresión aritmética de diferencia $d = 4$.

b) Progresión geométrica de razón $r = -2$.

c) Progresión aritmética de diferencia $d = \frac{1}{3}$.

d) Progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$.

Recuerda

■ Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que cada término, excepto el primero, se obtiene sumándole al anterior un mismo número llamado **diferencia, d** .

■ Una **progresión geométrica** es una sucesión cuyos términos, excepto el primero, se obtienen multiplicando el anterior por un mismo número llamado **razón, r** .

4. Calcula el término general de una progresión aritmética que tiene por diferencia $d = 3$ y cuyo primer término vale 10. Halla a_{12} y a_{15} .

Hallamos el término general.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 10 + (n-1) \cdot 3 = 10 + 3n - 3 = 3n + 7 \rightarrow a_n = 3n + 7$$

A partir del término general, calculamos los términos a_{12} y a_{15} .

$$a_{12} = 3 \cdot 12 + 7 = 36 + 7 = 43 \qquad a_{15} = 3 \cdot 15 + 7 = 45 + 7 = 52$$

Recuerda

El término general de las progresiones aritméticas es:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

5. Halla el término a_8 de una progresión aritmética si su tercer término vale 5, y el quinto, 13.

Sabemos que $a_3 = 5$ y $a_5 = 13$. Sustituimos estos datos en la fórmula del término general para hallar el primer término y la diferencia.

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= a_1 + (3-1) \cdot d \rightarrow a_1 + 2d = 5 \\ a_5 &= a_1 + (5-1) \cdot d \rightarrow a_1 + 4d = 13 \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos $a_1 = -3$ y $d = 4$.

Por lo tanto, el término general tiene por ecuación $a_n = -3 + (n-1) \cdot 4$.

Para calcular el término a_8 sustituimos en la expresión del término general.

$$a_8 = -3 + (8-1) \cdot 4 = -3 + 7 \cdot 4 = -3 + 28 = 25$$

6. Halla la suma de los 30 primeros términos de la progresión aritmética: 9, 6, 3, 0, -3, ...

En primer lugar necesitamos los términos a_1 y a_{30} .

$$a_1 = 9 \text{ y } d = -3$$

Con estos datos hallamos el término general para calcular a_{30} .

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 9 + (n - 1) \cdot (-3) = 9 - 3n + 3 = -3n + 12 \rightarrow a_n = -3n + 12$$

$$a_{30} = -3 \cdot 30 + 12 = -90 + 12 = -78$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \rightarrow S_{30} = \frac{(9 - 78) \cdot 30}{2} = \frac{-2070}{2} = -1035$$

Recuerda

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética es:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

7. Calcula el término general de una progresión geométrica de razón $r = 5$ cuyo primer término vale 2. Halla a_7 y a_{10} .

Hallamos el término general.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$$

A partir del término general, calculamos los términos a_7 y a_{10} .

$$a_7 = 2 \cdot 5^{7-1} = 2 \cdot 5^6 = 31250 \quad a_{10} = 2 \cdot 5^{10-1} = 2 \cdot 5^9 = 3906250$$

Recuerda

El término general de las progresiones geométricas es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

8. Halla la razón y el término general de una progresión geométrica si su segundo término es $\frac{3}{2}$ y el cuarto vale $\frac{27}{2}$.

Sustituimos $a_2 = \frac{3}{2}$ y $a_4 = \frac{27}{2}$ en la expresión del término general para hallar a_1 y la razón, r .

$$a_2 = a_1 \cdot r^{2-1} = \frac{3}{2} \rightarrow a_1 \cdot r = \frac{3}{2} \quad a_4 = a_1 \cdot r^{4-1} = \frac{27}{2} \rightarrow a_1 \cdot r^3 = \frac{27}{2}$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera obtenemos $r^2 = 9$. Entonces, $r = 3$.

Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos $a_1 = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto el término general es: $a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1}$

9. Halla la suma de los 5 primeros términos de una progresión geométrica de razón 1,5 cuyo primer término es 8.

Sustituimos los datos en la expresión.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \rightarrow S_5 = \frac{8 \cdot (1,5^5 - 1)}{1,5 - 1} = \frac{52,75}{0,5} = 105,5$$

Recuerda

La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica es:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}$$

10. Los primeros términos de una sucesión son $a_1 = 11$, $a_2 = 16$, $a_3 = 21$. Halla el término general. ¿Hay algún término cuyo valor sea 83? ¿Y 2001?

Como $a_1 = 11$, $a_2 = 16$ y $a_3 = 21$, la diferencia es $d = 5$.

El término general es $S_n = S_1 + (n - 1) \cdot d = 11 + (n - 1) \cdot 5 = 5n + 6$.

Ningún término valdrá 83 ya que si sustituimos en la expresión del término general la ecuación resultante es $5n + 6 = 83$ que no tiene solución natural.

El valor del término a_{399} es 2001 ya que si sustituimos en la expresión del término general, la ecuación resultante $5n + 6 = 83$ tiene como solución natural $n = 399$.

Evaluación B

1. Completa las siguientes sucesiones con los términos que faltan.

a) 3, $\boxed{6}$, 12, 24, $\boxed{48}$, 96, ...

c) $\frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \boxed{\frac{3}{9}}, \frac{4}{11}, \boxed{\frac{5}{13}}, \frac{6}{15}, \dots$

b) $-16, 4, -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \boxed{\frac{1}{64}}, -\frac{1}{256}, \dots$

d) 0, 3, 8, $\boxed{15}, \boxed{24}, 35, \dots$

2. Escribe los cuatro primeros términos de estas sucesiones.

a) $a_n = (n - 1)^2$

b) $a_n = 3n - 2$

c) $a_n = \frac{n-1}{n+2}$

d) $a_n = n^3 - 1$

a) $a_1 = (1 - 1)^2 = 0, a_2 = (2 - 1)^2 = 1, a_3 = (3 - 1)^2 = 4, a_4 = (4 - 1)^2 = 9$

b) $a_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1, a_2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4, a_3 = 3 \cdot 3 - 2 = 7, a_4 = 3 \cdot 4 - 2 = 10$

c) $a_1 = \frac{1-1}{1+2} = 0, a_2 = \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}, a_4 = \frac{4-1}{4+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

d) $a_1 = 1^3 - 1 = 0, a_2 = 2^3 - 1 = 7, a_3 = 3^3 - 1 = 26, a_4 = 4^3 - 1 = 63$

3. Halla los cinco primeros términos de estas sucesiones recurrentes.

a) $a_1 = 5, a_n = a_{n-1} + 2$

c) $a_1 = -2, a_n = a_{n-1}^2$

b) $a_1 = 5, a_2 = 2, a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

d) $a_1 = 3, a_2 = 2, a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2}$

a) $a_1 = 5, a_2 = a_1 + 2 = 5 + 2 = 7, a_3 = a_2 + 2 = 7 + 2 = 9, a_4 = a_3 + 2 = 9 + 2 = 11, a_5 = a_4 + 2 = 11 + 2 = 13$

b) $a_1 = 5, a_2 = 2, a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3, a_4 = a_3 - a_2 = -3 - 2 = -5, a_5 = a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -2$

c) $a_1 = -2, a_2 = a_1^2 = (-2)^2 = 4, a_3 = a_2^2 = 4^2 = 16, a_4 = a_3^2 = 16^2 = 256, a_5 = a_4^2 = 256^2 = 65536$

d) $a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 3a_2 + a_1 = 3 \cdot 2 + 3 = 9, a_4 = 3a_3 + a_2 = 3 \cdot 9 + 2 = 29, a_5 = 3a_4 + a_3 = 3 \cdot 29 + 9 = 96$

4. Encuentra el término general de las siguientes progresiones aritméticas. Halla a_{13} y a_{25} .

a) $-5, -3, -1, 1, 3, \dots$

b) $3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}, \dots$

a) $a_1 = -5, d = 2 \rightarrow a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = -5 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 7 \rightarrow a_n = 2n - 7$

Sustituyendo en la expresión anterior: $a_{13} = 2 \cdot 13 - 7 = 19, a_{25} = 2 \cdot 25 - 7 = 43$

b) $a_1 = 3, d = \frac{1}{2} \rightarrow a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 3 + (n - 1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2} + \frac{5}{2} \rightarrow a_n = \frac{n}{2} + \frac{5}{2}$

Sustituyendo en la expresión anterior: $a_{13} = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9, a_{25} = \frac{25}{2} + \frac{5}{2} = 15$

5. En una progresión aritmética conocemos los términos $a_5 = 31$ y $a_{12} = 59$. Halla en qué posición está el término cuyo valor es 135.

Calculamos la diferencia: $d = \frac{a_{12} - a_5}{12 - 5} = \frac{59 - 31}{7} = \frac{28}{7} = 4$

Hallamos a_1 sustituyendo en la fórmula del término general el valor de a_5 .

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow a_5 = a_1 + (5 - 1) \cdot 4 \rightarrow 31 = a_1 + 16 \rightarrow a_1 = 15$

Por tanto, el término general es: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 15 + (n - 1) \cdot 4 = 4n + 11$

Calculamos la posición del término cuyo valor es 135: $4n + 11 = 135 \rightarrow 4n = 124 \rightarrow n = 31$

Luego $a_{31} = 135$.

Recuerda

Una sucesión recurrente es aquella en la que cada término se define a partir de los anteriores.

Ten en cuenta

Si a_m y a_n son términos de una progresión aritmética, entonces:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

6. Interpola tres términos aritméticos entre los números 17 y 69.

Tenemos que hallar los términos a_2 , a_3 y a_4 de la progresión aritmética. Calculamos la diferencia de la progresión.

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{a_5 - a_1}{5 - 1} = \frac{69 - 17}{5 - 1} = \frac{52}{4} = 13$$

Entonces: $a_2 = 17 + 13 = 30$, $a_3 = 30 + 13 = 43$, $a_4 = 43 + 13 = 56$

Ten en cuenta

Interpolar aritméticamente tres términos entre los números 17 y 69 equivale a hallar los términos a_2 , a_3 y a_4 de una progresión aritmética sabiendo que $a_1 = 17$ y $a_5 = 69$.

7. Los tres lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética de diferencia 5 cm. Halla la medida de cada uno de los lados.

Como los lados están en progresión aritmética de diferencia 5, los llamamos x , $x + 5$ y $x + 10$, siendo este último la hipotenusa por ser el mayor. Aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$(x + 10)^2 = (x + 5)^2 + x^2 \rightarrow x^2 + 20x + 100 = x^2 + 10x + 25 + x^2 \rightarrow x^2 - 10x - 75 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-75)}}{2} = \frac{10 \pm 20}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 15 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

Por lo tanto, el primer lado mide 15 cm, y los otros dos, 20 cm y 25 cm.

8. Calcula el término general de las siguientes progresiones geométricas. Halla a_8 y a_{11} .

a) 81, 27, 8, 3, 1, ...

b) -3, 6, -12, 24, -48, ...

La fórmula del término general de una progresión geométrica es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.

a) $a_1 = 81$, $r = \frac{1}{3}$, $a_n = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$a_8 = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{8-1} = 3^4 \cdot \frac{1}{3^7} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}, \quad a_{11} = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{11-1} = 3^4 \cdot \frac{1}{3^{10}} = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$$

b) $a_1 = -3$, $r = -2$, $a_n = (-3) \cdot (-2)^{n-1}$

$$a_8 = (-3) \cdot (-2)^{8-1} = (-3) \cdot (-2)^7 = 384, \quad a_{11} = (-3) \cdot (-2)^{11-1} = (-3) \cdot (-2)^{10} = -3072$$

9. Averigua la razón de una progresión geométrica cuyo primer término es 343 y el cuarto 27. Halla el término general.

Sustituimos los valores $a_1 = 343$ y $a_4 = 27$ en la expresión del término general para obtener la razón.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_4 = a_1 \cdot r^{4-1} \rightarrow 27 = 343 \cdot r^3 \rightarrow r^3 = \frac{27}{343} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{27}{343}} = \frac{3}{7}$$

El término general es: $a_n = a_1 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1}$

10. Halla el valor de esta suma: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

Tenemos que calcular la suma de todos los términos de una

progresión geométrica donde $a_1 = 1$ y $r = \frac{1}{2}$.

Sustituyendo los valores en la fórmula: $S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

Recuerda

Si la razón de una progresión geométrica cumple que $-1 < r < 1$, la suma de todos sus términos es:

$$S_n = \frac{a_1}{1 - r}$$

Evaluación C

1. Escribe los cuatro siguientes términos de estas sucesiones.

a) $-1, 3, -9, 27, -81, \boxed{243}, \boxed{-729}, \boxed{2187}, \boxed{-6561}$

c) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \boxed{\frac{25}{6}}, \boxed{\frac{36}{7}}, \boxed{\frac{49}{8}}, \boxed{\frac{64}{9}}$

b) $1, 8, 27, 64, \boxed{125}, \boxed{216}, \boxed{343}, \boxed{512}$

d) $\frac{2}{5}, \frac{11}{15}, \frac{16}{15}, \frac{7}{5}, \boxed{\frac{26}{15}}, \boxed{\frac{31}{15}}, \boxed{\frac{12}{5}}, \boxed{\frac{41}{15}}$

2. Relaciona cada sucesión con su término general.

$$\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \dots$$

$$1, 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{16}, \dots$$

$$\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \dots$$

$$1, 1, \frac{4}{3}, 2, \frac{16}{5}, \dots$$

$$\frac{n^2}{2^n}$$

$$\frac{2^n}{2n}$$

$$\frac{n}{2^{n-1}}$$

$$\frac{n^2}{n+1}$$

3. Indica si los siguientes números pertenecen a la sucesión $a_n = n^2 - 2n + 3$ y, en caso afirmativo, determina la posición que ocupan.

a) 18

b) 75

c) 2

d) 83

Igualamos la expresión del término general con cada uno de los valores dados y resolvemos la ecuación de segundo grado resultante.

a) $n^2 - 2n + 3 = 18 \rightarrow n^2 - 2n - 15 = 0 \rightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 5 \\ n_2 = -3 \end{cases}$

Tomando la solución positiva, tenemos que 18 es el quinto término de la sucesión.

b) $n^2 - 2n + 3 = 75 \rightarrow n^2 - 2n - 72 = 0 \rightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 288}}{2} = \frac{2 \pm 17,09}{2} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 9,544 \\ n_2 = -7,544 \end{cases}$

Como n no es un valor natural, 75 no pertenece a la sucesión.

c) $n^2 - 2n + 3 = 2 \rightarrow n^2 - 2n + 1 = 0 \rightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow$ El primer término de la sucesión es 2.

d) $n^2 - 2n + 3 = 83 \rightarrow n^2 - 2n - 80 = 0 \rightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 320}}{2} = \frac{2 \pm 18}{2} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 10 \\ n_2 = -8 \end{cases}$

Tomando la solución positiva, tenemos que 83 es el décimo término de la sucesión.

4. El primer término de una progresión aritmética es 80, y la diferencia, -7 . ¿Qué lugar ocupar el primer número negativo?

Tenemos que determinar cuál es el primer valor de n que cumpla que $a_n < 0$.

Calculamos el término general: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 80 + (n - 1) \cdot (-7) = -7n + 87 \rightarrow a_n = -7n + 87 - 7n + 87 < 0 \rightarrow 7n > 87 \rightarrow n > 12,43$

Por tanto, el primer número negativo ocupa el lugar 13.

5. Halla el término a_{80} de una progresión aritmética sabiendo que $a_5 = 20$ y $a_{10} = 5$.

Hallamos el término general: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow \begin{cases} a_5 = a_1 + (5 - 1) \cdot d \rightarrow 20 = a_1 + 4d \\ a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot d \rightarrow 5 = a_1 + 9d \end{cases}$

Resolviendo el sistema tenemos que $a_1 = 32$ y $d = -3$.

Por tanto, el término general es: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 32 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 35$

Luego: $a_{80} = -3 \cdot 80 + 35 = -205$

6. El décimo término de una progresión aritmética es $a_{10} = 39$ y su diferencia $d = 7$. Halla el primer término, el término general y la suma de los 50 primeros términos.

Hallamos el término a_1 sustituyendo los datos que nos dan en la expresión del término general.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot 7 \rightarrow 39 = a_1 + 63 \rightarrow a_1 = -24$$

Por lo tanto, el término general es: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow a_n = -24 + (n - 1) \cdot 7 \rightarrow a_n = 7n - 31$

Calculamos el término a_{50} para hallar la suma de los 50 primeros términos: $a_{50} = 7 \cdot 50 - 31 = 319$

$$\text{Sustituyendo en la fórmula: } S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \rightarrow S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(-24 + 319) \cdot 50}{2} = 7375$$

7. Rodrigo hace casitas con palillos. En la primera utiliza 6 palillos, en la segunda el doble, en la tercera el triple y así sucesivamente. Si dispone de una caja con 1 026 palillos, ¿cuántas casitas consecutivas podrá construir?

Tenemos que calcular el valor de n tal que $S_n = 1\,026$.

El término general de esta sucesión es $a_n = 6n$. Sustituyendo en la fórmula tenemos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \rightarrow 1026 = \frac{(6 + 6n) \cdot n}{2} \rightarrow n^2 + n - 342 = 0 \rightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 1368}}{2} = \frac{-1 \pm 37}{2} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 18 \\ n_2 = -19 \end{cases}$$

Podrá construir 18 casitas.

8. Halla el término general y el término a_8 de las siguientes progresiones.

a) 200, 100, 50, 25,...

b) 10; 1; 0,1; 0,01;...

a) Es una progresión geométrica cuyo primer término es 200 y su razón $\frac{1}{2}$.

$$\text{Por tanto: } a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ y } a_8 = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8-1} = 1,5625$$

b) Es una progresión geométrica cuyo primer término es 10 y su razón 0,1.

$$\text{Entonces: } a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 10 \cdot 0,1^{n-1} \text{ y } a_8 = 10 \cdot 0,1^{8-1} = 10 \cdot 0,1^7 = 10 \cdot \frac{1}{10^7} = 10^{-6}$$

9. Halla la suma de los 5 primeros términos de una progresión geométrica cuya razón es $r = \frac{2}{3}$ y su quinto término es $\frac{1}{6}$.

Hallamos el primer término de la progresión mediante la expresión del término general.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} \rightarrow \frac{1}{6} = a_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{5-1} \rightarrow \frac{1}{6} = a_1 \cdot \frac{16}{81} \rightarrow a_1 = \frac{27}{32}$$

Ahora calculamos la suma de los 5 primeros términos mediante la fórmula.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \rightarrow S_5 = \frac{a_1 \cdot (r^5 - 1)}{r - 1} = \frac{\frac{27}{32} \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^5 - 1\right]}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{\frac{3^3}{2^5} \cdot \frac{2^5}{3^5} - \frac{3^3}{2^5}}{-\frac{1}{3}} = -3 \cdot \left(\frac{1}{3^2} - \frac{3^3}{2^5}\right) = \frac{211}{96}$$

10. Un coche cuesta 20 000 € y cada año su precio se rebaja un 10%. ¿Cuál será su precio al cabo de 5 años?

Si cada año su precio desciende un 10%, el segundo año pagaríamos un 90%, lo que supone multiplicar el precio por 0,9. Por tanto, se trata de una progresión geométrica de primer término 20 000 y razón 0,9. El término general es $a_n = 20\,000 \cdot 0,9^{n-1}$. Entonces: $a_5 = 20\,000 \cdot 0,9^4 = 13\,122$

Al cabo de 5 años su precio será de 13 122 €.

Evaluación D

1. Escribe el tercer, el quinto y el décimo término de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = (n-2)(n+1)$ b) $a_n = (-1)^n$ c) $a_n = \frac{n+1}{n^2}$ d) $a_n = \frac{n-1}{n}$

a) $a_3 = (3-2)(3+1) = 4$, $a_5 = (5-2)(5+1) = 18$, $a_{10} = (10-2)(10+1) = 88$

b) $a_3 = (-1)^3 = -1$, $a_5 = (-1)^5 = -1$, $a_{10} = (-1)^{10} = 1$

c) $a_3 = \frac{3+1}{3^2} = \frac{4}{9}$, $a_5 = \frac{5+1}{5^2} = \frac{6}{25}$, $a_{10} = \frac{10+1}{10^2} = \frac{11}{100}$

d) $a_3 = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$, $a_5 = \frac{5-1}{5} = \frac{4}{5}$, $a_{10} = \frac{10-1}{10} = \frac{9}{10}$

2. En una sucesión, cada término cumple que es el triple del término anterior más 2 unidades.

a) Escribe la ley de recurrencia de la sucesión.

b) Halla los 6 primeros términos de ella sabiendo que el primero es 1.

a) La ley de recurrencia es: $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 2$

b) $a_1 = 1$, $a_2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$, $a_3 = 3 \cdot 5 + 2 = 17$, $a_4 = 3 \cdot 17 + 2 = 53$, $a_5 = 3 \cdot 53 + 2 = 161$, $a_6 = 3 \cdot 161 + 2 = 485$

3. Calcula el término general de la progresión aritmética que tiene por diferencia $d = -5$ y cuyo tercer término vale -6 . Halla a_{20} .

Calculamos a_1 mediante la expresión del término general y los datos que nos dan.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_3 = a_1 + (3-1) \cdot (-5) \rightarrow -6 = a_1 - 10 \rightarrow a_1 = 4$$

Por lo tanto, el término general es: $a_n = 4 + (n-1) \cdot (-5) \rightarrow a_n = -5n + 9$ y $a_{20} = -5 \cdot 20 + 9 = -91$

4. Alfonso y Conchi han guardado 100 € en un cajón y cada mes añaden 75 € más.

a) Escribe el término general que indica el dinero que tienen en el mes n .

b) ¿Cuánto dinero tendrán al cabo de 2 años y medio?

c) Si su objetivo es conseguir 850 € para hacer un viaje, ¿cuántos meses tardarán en reunirlo?

a) Se trata de una progresión aritmética que tiene por diferencia $d = 75$ y cuyo primer término vale 100. Entonces: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_n = 100 + (n-1) \cdot 75 \rightarrow a_n = 75n + 25$

b) Dos años y medio son 30 meses por lo que $a_{30} = 75 \cdot 30 + 25 = 2275$. Tendrán 2275 €.

c) Tenemos que calcular n tal que $a_n = 850$. Sustituyendo en la expresión del término general tenemos: $75n + 25 = 850 \rightarrow 75n = 825 \rightarrow n = 11$. Tardarán 11 meses reunir el dinero.

5. Calcula la suma $a_{20} + a_{21} + a_{22} + \dots + a_{40}$ sabiendo que el primer término de la progresión aritmética vale 15 y la diferencia $d = 7$.

Para calcular la suma tenemos que hallar $S_{40} - S_{19}$. Para ello necesitamos calcular términos a_{40} y a_{19} .

El término general es: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_n = 15 + (n-1) \cdot 7 \rightarrow a_n = 7n + 8$

Entonces $a_{19} = 7 \cdot 19 + 8 = 141$ y $a_{40} = 7 \cdot 40 + 8 = 288$.

Por tanto:

$$S_{40} - S_{19} = \frac{(a_1 + a_{40}) \cdot 40}{2} - \frac{(a_1 + a_{19}) \cdot 19}{2} = \frac{(15 + 288) \cdot 40}{2} - \frac{(15 + 141) \cdot 19}{2} = 6060 - 1482 = 4578$$

6. Calcula la suma de los 100 primeros números pares.

Tenemos que calcular la suma $2 + 4 + 6 + 8 + \dots$ que es una progresión aritmética que tiene por diferencia $d = 2$ y cuyo primer término vale 2. Esta progresión tiene por término general $a_n = 2n$.

Para calcular la suma de los 100 primeros términos utilizamos la fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$.

$$a_{100} = 2 \cdot 100 = 100$$

$$\text{Sustituyendo en la fórmula: } S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{(2 + 100) \cdot 100}{2} = 10100$$

7. Partiendo de un triángulo equilátero, construimos otra figura dividiendo cada lado en 4. Repitiendo el proceso, se van formando nuevas figuras cada vez con un número mayor de lados. Escribe la fórmula que nos indica el número de lados que tiene la figura n . ¿Cuántos lados tendrá la figura al repetir el proceso 10 veces?

Como en cada paso cada lado se divide en 4, el número total de lados de cada figura se multiplica por 4. Por tanto, se trata de una progresión geométrica de razón $r = 4$ cuyo primer término vale 3.

El término general es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1}$, que da la fórmula que indica el número de lados de la figura n .

Al repetir el proceso 10 veces, tenemos la figura que está en la posición 11.

Esta figura tendrá $a^{11} = 3 \cdot 4^{11-1} = 3 \cdot 4^{10} = 3 \cdot 1048576 = 3145728$ lados.

8. Interpola cuatro términos geométricos entre $a_1 = 486$ y $a_6 = 2$.

$$a_6 = a_1 \cdot r^5 \rightarrow 2 = 486 \cdot r^5 \rightarrow r^5 = \frac{2}{486} = \frac{1}{243} \rightarrow r = \sqrt[5]{\frac{1}{243}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Por tanto: } a_2 = 486 \cdot \frac{1}{3} = 162, a_3 = 162 \cdot \frac{1}{3} = 54, a_4 = 54 \cdot \frac{1}{3} = 18, a_5 = 18 \cdot \frac{1}{3} = 6$$

9. Halla la suma de todos los términos de la progresión $3, 2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \dots$

Es una progresión geométrica de razón $r = \frac{2}{3}$ cuyo primer término vale 3.

$$\text{Por tanto, la suma de todos los términos de esta progresión es: } S_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{3}{1-\frac{2}{3}} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9$$

10. Pablo lanza una pelota desde una ventana que se encuentra a 64 m de altura. Al llegar al suelo, rebota y asciende en cada nuevo bote $\frac{2}{3}$ de la altura anterior. ¿A qué altura está la pelota tras rebotar 10 veces?

Se trata de una progresión geométrica de razón $r = \frac{2}{3}$ cuyo primer término vale 64.

$$\text{Por tanto, el término general es: } a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 64 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\text{Tras rebotar 10 veces, tenemos que calcular el término 11: } a_{11} = 64 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{11-1} = 1,11$$

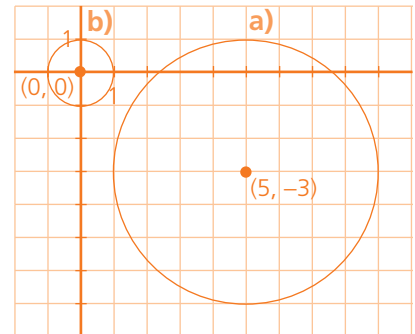
La pelota estará a 1,11 m de altura.

GEOMETRÍA DEL PLANO. MOVIMIENTOS

Evaluación A

1. Dibuja y describe el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan:

- 4 unidades del punto $(5, -3)$.
 - 1 unidad del origen de coordenadas.
- El lugar geométrico es una circunferencia de centro $(5, -3)$ y radio 4 unidades.
 - El lugar geométrico es una circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio 1 unidad.



2. Dado un ángulo $\hat{A} = 110^\circ$, calcula la medida de su ángulo suplementario.

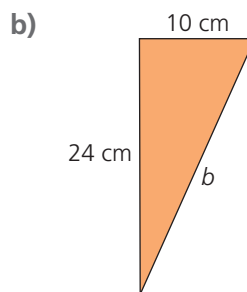
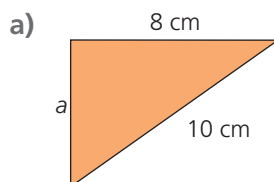
Calculamos la medida del ángulo suplementario, \hat{B} .
 $\hat{B} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

Recuerda

Dos ángulos \hat{A} y \hat{B} son suplementarios si:

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$$

3. Halla la longitud de los lados desconocidos de estos triángulos rectángulos.



Recuerda

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo de hipotenusa a y catetos b y c , se cumple que $a^2 = b^2 + c^2$.

a) Hallamos la medida de uno de los catetos aplicando el teorema de Pitágoras.

$$10^2 = 8^2 + a^2 \rightarrow a^2 = 100 - 64 = 36 \rightarrow a = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

b) Hallamos la hipotenusa aplicando el teorema de Pitágoras.

$$b^2 = 10^2 + 24^2 \rightarrow b^2 = 100 + 576 = 676 \rightarrow b = \sqrt{676} = 26 \text{ cm}$$

4. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de 16 cm de base y 12 cm de altura.

La diagonal del rectángulo es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son la base y la altura del rectángulo. Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular su longitud.

$$d^2 = 12^2 + 16^2 \rightarrow d^2 = 144 + 256 = 400 \rightarrow d = \sqrt{400} = 20 \text{ cm}$$

La diagonal mide 20 cm.

5. Halla el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 6 m y 8 m.

Las diagonales del rombo forman 4 triángulos rectángulos cuyos catetos miden $6 : 2 = 3$ cm y $8 : 2 = 4$ cm. Para hallar el perímetro calculamos uno de los lados aplicando el teorema de Pitágoras.

$$l^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow l^2 = 9 + 16 = 25 \rightarrow l = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Por tanto, el perímetro es: $P = 4 \cdot l = 4 \cdot 5 = 20$ cm

6. Halla el perímetro y el área de estos cuadriláteros.

- a) Un romboide de lados 8 cm y 5 cm, y 4 cm de altura.
- b) Un rectángulo de 9 m de base y 0,5 dam de altura.

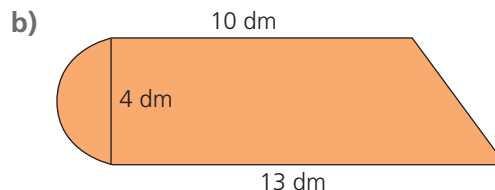
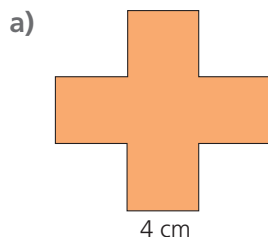
a) $P = 2a + 2b = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 8 = 10 + 16 = 26$ cm; $A = b \cdot h = 8 \cdot 4 = 32$ cm²

b) $0,5$ dam = 5 m; $P = 2b + 2h = 2 \cdot 9 + 2 \cdot 5 = 18 + 10 = 28$ cm; $A = b \cdot h = 9 \cdot 5 = 45$ cm²

Ten en cuenta

Antes de operar, hay que expresar todas las medidas en las mismas unidades.

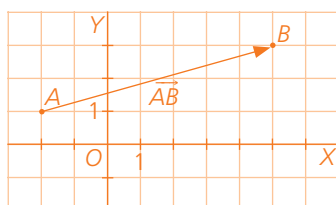
7. Halla el área de las siguientes figuras.



- a) La figura está formada por 5 cuadrados de 4 cm de lado. Por tanto: $A = 5 \cdot l^2 = 5 \cdot 4^2 = 80$ cm²
- b) La figura está compuesta por un semicírculo y un trapecio rectángulo. Por tanto:

$$A = A_{\text{Semicírculo}} + A_{\text{Trapezio}} = \frac{\pi \cdot r^2}{2} + \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} + \frac{(13 + 10) \cdot 4}{2} = 6,28 + 46 = 52,28 \text{ dm}^2$$

8. Dibuja los puntos $A(-2, 1)$ y $B(5, 3)$ y el vector \overrightarrow{AB} . Determina las coordenadas del vector.



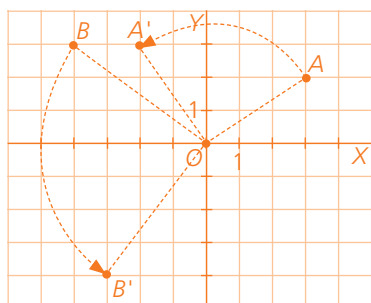
Las coordenadas de \overrightarrow{AB} son:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (5 - (-2), 3 - 1) = (7, 2)$$

Recuerda

Si $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$, entonces las coordenadas de \overrightarrow{AB} son $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

9. Efectúa un giro de centro O y 90° de ángulo a los puntos $A(3, 2)$ y $B(-4, 3)$. Indica las coordenadas de los nuevos puntos A' y B' .



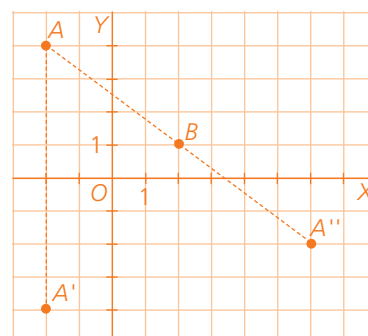
Las coordenadas son $A'(-2, 3)$ y $B'(-3, -4)$.

Recuerda

Si el ángulo de giro es positivo, el sentido del giro es contrario al de las agujas del reloj.

10. Indica las coordenadas del punto simétrico a $A(-2, 4)$:

- a) Respecto al eje de abscisas.
 - b) Respecto al punto $B(2, 1)$.
- a) Respecto al eje de abscisas, el punto simétrico es $A'(-2, -4)$.
 - b) Respecto al punto $B(2, 1)$, el punto simétrico es $A''(6, -2)$.



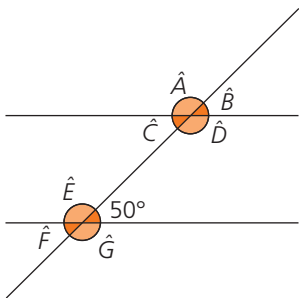
Evaluación B

1. Traza dos rectas secantes y dibuja el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ellas.

Comprobar que los alumnos dibujan dos rectas secantes y trazan las bisectrices de los ángulos que forman.

Recuerda
La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las rectas r y s que forman dicho ángulo.

2. Halla la medida los ángulos que faltan.



$\hat{F} = 50^\circ$ por ser opuesto por el vértice al ángulo dado.

$\hat{B} = \hat{C} = 50^\circ$ por ser correspondientes a 50° y a \hat{F} , respectivamente.

$\hat{E} = 130^\circ$ por ser adyacente al ángulo dado.

$\hat{G} = 130^\circ$ por ser opuesto por el vértice al ángulo \hat{E} .

$\hat{A} = \hat{D} = 130^\circ$ al ser correspondientes a los ángulos \hat{E} y \hat{G} , respectivamente.

Recuerda

- Dos ángulos opuestos por el vértice tienen la misma amplitud.
- Dos ángulos adyacentes son suplementarios.

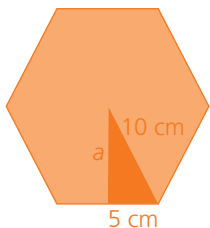
3. Halla la altura de un triángulo equilátero de 8 cm de lado.

La altura divide al triángulo equilátero en dos triángulos rectángulos cuya hipotenusa coincide con uno de sus lados, y uno de los catetos es la mitad de uno de los lados.

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular el otro cateto.

$$8^2 = h^2 + 4^2 \rightarrow h^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48 \rightarrow h = \sqrt{48} = 6,93 \text{ cm}$$

4. Calcula la apotema de un hexágono regular de 10 m de lado.



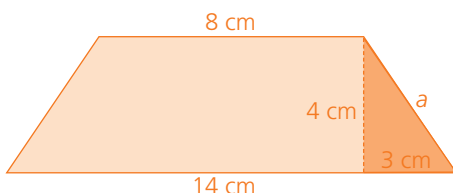
Como el lado del hexágono mide 10 cm, la longitud del segmento que une el centro con el vértice también mide 10 cm.

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la apotema.

$$10^2 = a^2 + 5^2 \rightarrow a^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75 \rightarrow a = \sqrt{75} = 8,66 \text{ cm}$$

Ten en cuenta
En un hexágono regular, los triángulos formados al unir el centro con el vértice son equiláteros.

5. Halla el perímetro y el área de un trapecio isósceles cuyas bases miden 14 cm y 8 cm, y su altura 4 cm.



Para calcular el perímetro tenemos que hallar la longitud del lado a .

Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$a^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \rightarrow a = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

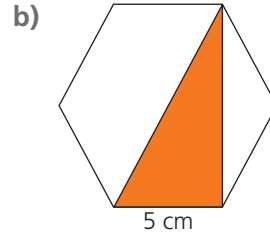
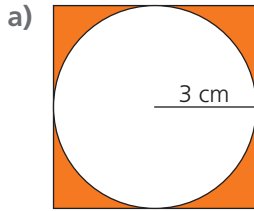
Por tanto:

$$P = 14 + 8 + 5 + 5 = 32 \text{ cm}$$

Calculamos el área utilizando la fórmula.

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(14 + 8) \cdot 4}{2} = 44 \text{ cm}^2$$

6. Determina el área de las regiones sombreadas.



a) Para calcular el área hallamos el área del cuadrado y le restamos el del círculo.

$$A = A_{\text{Cuadrado}} - A_{\text{Círculo}} = l^2 - \pi r^2 = 6^2 - \pi \cdot 3^2 = 7,73 \text{ cm}^2$$

b) Para hallar el área del triángulo necesitamos calcular la altura. La hipotenusa es el doble del lado del hexágono. Por tanto, aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$10^2 = h^2 + 5^2 \rightarrow h^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75 \rightarrow h = \sqrt{75} = 8,66 \text{ cm}$$

$$\text{Luego el área del triángulo es: } A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 8,66}{2} = 21,65 \text{ cm}^2$$

7. Calcula.

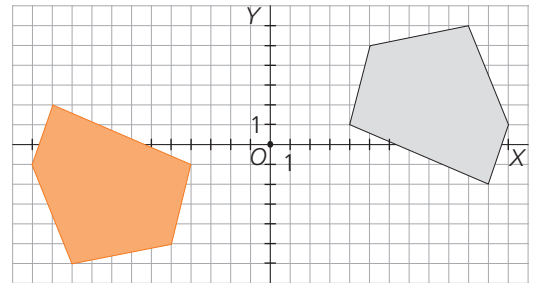
a) El vector de traslación que transforma el punto $P(1, 3)$ en el $P'(-2, 5)$.

b) Las coordenadas del punto P si al trasladarlo mediante el vector $\vec{v} = (4, 0)$ se ha transformado en el punto $P'(7, 13)$.

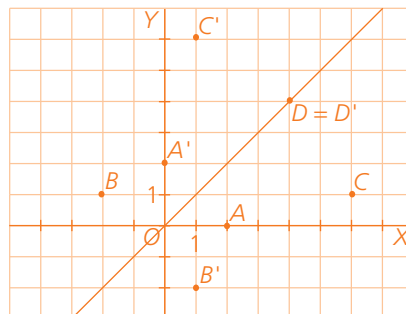
a) Calculamos el vector de traslación: $\vec{v} = (-2 - 1, 5 - 3) = (-3, 2)$

b) Sea $P = (p_1, p_2)$. Entonces: $(p_1, p_2) + (4, 0) = (7, 13) \rightarrow (p_1, p_2) = (7 - 4, 13 - 0) = (3, 13)$

8. Dibuja la figura que se obtiene al girar este polígono con centro O y ángulo 180° .



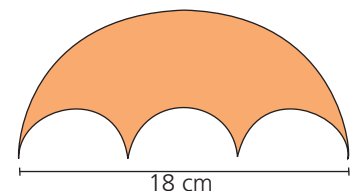
9. Dibuja una recta que pase por los puntos $(2, 2)$ y $(-1, -1)$. Halla respecto de ella los simétricos de los puntos $A(2, 0)$, $B(-2, 1)$, $C(6, 1)$ y $D(4, 4)$.



10. Halla el área de la siguiente figura.

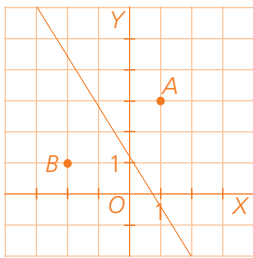
El área coloreada se calcula restando al área de un semicírculo de radio 9 cm, tres semicírculos de radio 3 cm. Por tanto:

$$A = \frac{\pi \cdot R^2}{2} - 3 \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 9^2}{2} - 3 \cdot \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = 127,23 - 42,41 = 84,82 \text{ cm}^2$$



Evaluación C

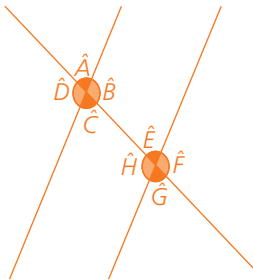
1. Representa los puntos $A(1, 3)$ y $B(-2, 1)$ y halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de ellos. ¿Cuál es el nombre de este lugar geométrico?



El lugar geométrico es la mediatriz del segmento \overline{AB} .

2. Dibuja dos rectas paralelas y una secante a ellas. Nombra los ángulos que se forman y compáralos según sean iguales o suplementarios razonando la respuesta.

Respuesta abierta:

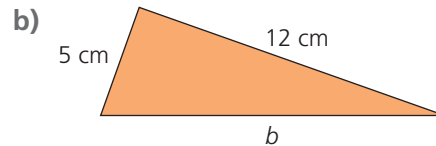
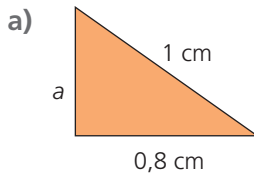


$\hat{A} = \hat{C} = \hat{E} = \hat{G}$ pues el ángulo \hat{A} es opuesto por el vértice al \hat{C} y los ángulos \hat{E} y \hat{G} son sus correspondientes.

$\hat{B} = \hat{D} = \hat{F} = \hat{H}$ pues el ángulo \hat{B} es opuesto por el vértice al \hat{D} y los ángulos \hat{F} y \hat{H} son sus correspondientes.

\hat{A} y \hat{B} , \hat{E} y \hat{F} , \hat{A} y \hat{D} , \hat{E} y \hat{H} , \hat{C} y \hat{B} , \hat{G} y \hat{F} , \hat{C} y \hat{D} , \hat{G} y \hat{H} son suplementarios por ser adyacentes.

3. Determina la longitud de los lados desconocidos de estos triángulos rectángulos.



- a) Calculamos el cateto aplicando el teorema de Pitágoras.
 $1^2 = 0,8^2 + a^2 \rightarrow a^2 = 1 - 0,64 = 0,36 \rightarrow a = \sqrt{0,36} = 0,6 \text{ cm}$
- b) Hallamos la hipotenusa aplicando el teorema de Pitágoras.
 $b^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 \rightarrow b = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$

4. Halla la altura de un triángulo isósceles de 10 cm de base y 36 cm de perímetro.

Al ser la base 10 cm y el perímetro 36 cm, cada lado igual mide $(36 - 10) : 2 = 13 \text{ cm}$.

Al trazar la altura sobre el lado desigual, se forman dos triángulos rectángulos de base 5 cm. Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar la altura.

$$13^2 = 5^2 + c^2 \rightarrow c^2 = 169 - 25 = 144 \rightarrow c = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

5. Calcula el perímetro y el área de un rombo cuyas diagonales miden 12 cm y 16 cm.

Para calcular el perímetro tenemos que hallar la medida del lado del rombo.

Al trazar las diagonales del rombo, se forman 4 triángulos rectángulos de $12 : 2 = 6 \text{ cm}$ de base y $16 : 2 = 8 \text{ cm}$ de altura. Como la hipotenusa coincide con el lado del rombo, aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular su longitud.

$$l^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \rightarrow l = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

Por tanto: $P = 4 \cdot l = 4 \cdot 10 = 40 \text{ cm}$

Calculamos el área del rombo mediante la fórmula: $A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ cm}^2$

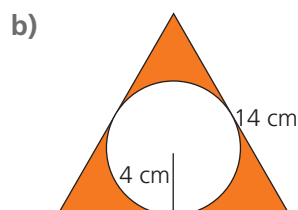
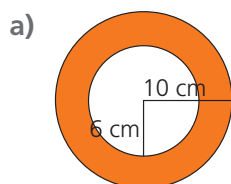
- 6.** Joaquín quiere cercar un terreno circular de 20 m de diámetro. ¿Cuántos metros de valla necesitará? ¿Qué superficie tiene el terreno?

Para saber cuántos metros de valla necesita, calculamos la longitud de la circunferencia.

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 10 = 62,83 \text{ cm}$$

La superficie del terreno es el área: $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 10^2 = 314,16 \text{ cm}^2$

- 7.** Halla el área de estas regiones sombreadas.



- a) Calculamos el área de una corona circular de radio mayor $R = 10 \text{ cm}$ y radio menor $r = 6 \text{ cm}$.

$$A = \pi \cdot (R^2 + r^2) = \pi \cdot (10^2 - 6^2) = 201,06 \text{ cm}^2$$

- b) Calculamos el área del triángulo equilátero de 14 cm de lado y le restamos la del círculo de radio 4 cm. Primero hallamos la altura del triángulo mediante el teorema de Pitágoras.

$$14^2 = 7^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 196 - 49 = 147 \rightarrow h = \sqrt{147} = 12,12 \text{ cm}$$

Entonces: $A = A_{\text{Triángulo}} - A_{\text{Círculo}} = \frac{b \cdot h}{2} - \pi \cdot r^2 = \frac{14 \cdot 12,12}{2} - \pi \cdot 4^2 = 84,84 - 50,27 = 34,57 \text{ cm}^2$

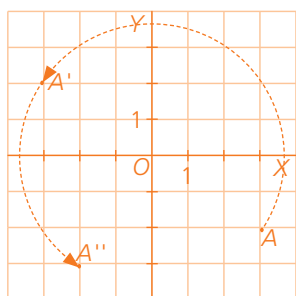
- 8.** Los vértices de un triángulo son $A(-1, 4)$, $B(1, 1)$ y $C(-1, -1)$. Determina las coordenadas de la figura obtenida al aplicar una traslación mediante el vector $\vec{v} = (4, -1)$.

Sumamos a cada punto las coordenadas del vector.

$$A' = (-1, 4) + (4, -1) = (3, 3) \quad B' = (1, 1) + (4, -1) = (5, 0) \quad C' = (-1, -1) + (4, -1) = (3, -2)$$

La figura obtenida es un triángulo de coordenadas $A'(3, 3)$, $B'(5, 0)$ y $C'(3, -2)$.

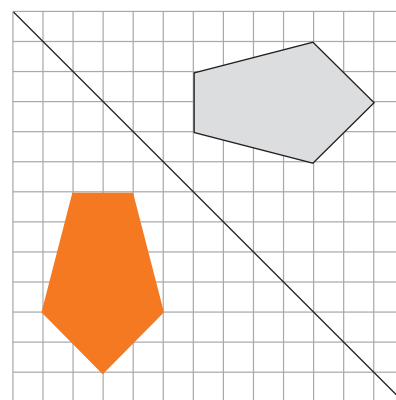
- 9.** Aplica al punto $A(3, -2)$ un giro de centro O y ángulo 180° y, a continuación, otro de 90° . ¿Cómo podemos llegar a ese punto con un solo giro?



Al aplicar los dos giros al punto $A(3, -2)$ obtenemos el punto $(-2, 3)$.

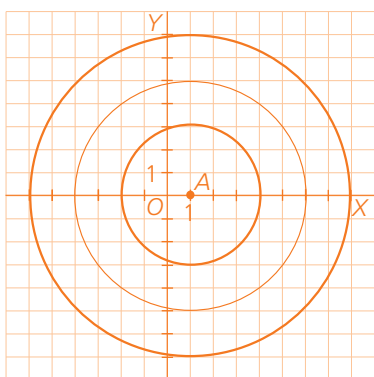
Se podría llegar a ese punto haciendo un único giro de ángulo 270° .

- 10.** Halla el simétrico de la siguiente figura respecto de la recta marcada.



Evaluación D

1. Dada una circunferencia de centro $A(1, 0)$ y 5 unidades de radio, dibuja y describe el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a 2 unidades de ella.



El lugar geométrico de los puntos que se encuentran a 2 unidades de ella son dos circunferencias concéntricas, una de radio 3 unidades y otra de radio 7 unidades.

2. ¿Cuánto mide el suplementario de un ángulo de 40° ? ¿Y su opuesto por el vértice? ¿Y su adyacente? ¿Y el suplementario de su suplementario?

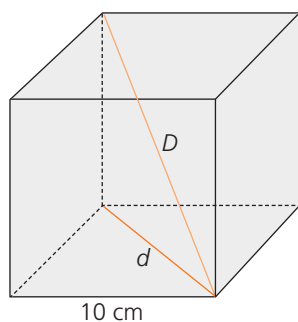
El suplementario de un ángulo de 40° mide $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$.

Su opuesto por el vértice mide 40° al ser iguales

El adyacente de un ángulo es su suplementario, por lo que mide 140° .

El suplementario del suplementario es el mismo ángulo, por lo que mide 40° .

3. Halla la diagonal de un cubo de lado 10 cm ayudándote de la figura.



Primero calculamos el valor de la diagonal d aplicando el teorema de Pitágoras.

$$d^2 = l^2 + l^2 = 10^2 + 10^2 = 200 \rightarrow d = \sqrt{200} = 14,14 \text{ cm}$$

Volvemos a aplicar el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de la diagonal del cubo, D .

$$D^2 = l^2 + d^2 = 10^2 + 14,14^2 = 300 \rightarrow D = \sqrt{300} = 17,32 \text{ cm}$$

4. Calcula la altura a la que apoya en la pared una escalera de 3 m de largo si separamos el pie a 40 cm de la pared.

La escalera forma un triángulo rectángulo con la pared y el suelo. Uno de los catetos es la distancia del pie de la escalera a la pared, $40 \text{ cm} = 0,4 \text{ m}$, y la hipotenusa es la longitud de la escalera. Calculamos el otro cateto aplicando el teorema de Pitágoras.

$$3^2 = 0,4^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 9 - 0,16 = 8,84 \rightarrow h = \sqrt{8,84} = 2,97 \text{ m}$$

Apoyará a 2,97 m de la pared.

5. Razona si los siguientes valores corresponden a los lados de un triángulo rectángulo.

a) 9, 40 y 41

b) 20, 21 y 29

c) 6, 8 y 12

d) 7, 24 y 25

Para comprobarlo, estudiamos si se verifica el teorema de Pitágoras.

a) $41^2 = 40^2 + 9 \rightarrow 1681 = 1600 + 81 \rightarrow$ Sí corresponden a los lados de un triángulo rectángulo.

b) $29^2 = 20^2 + 21^2 \rightarrow 841 = 400 + 441 \rightarrow$ Sí corresponden a los lados de un triángulo rectángulo.

c) $12^2 \neq 6^2 + 8^2 \rightarrow 144 \neq 36 + 64 \rightarrow$ No corresponden a los lados de un triángulo rectángulo.

d) $25^2 = 7^2 + 24^2 \rightarrow 625 = 49 + 576 \rightarrow$ Sí corresponden a los lados de un triángulo rectángulo.

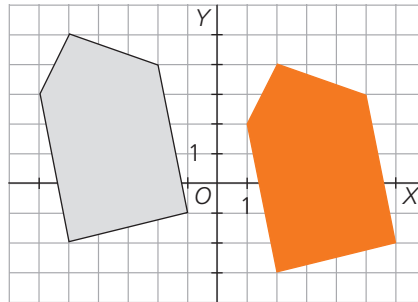
- 6.** Halla el área de un hexágono regular de lado 8 cm.

Calculamos la apotema aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo formado por la apotema, el segmento que une el centro del hexágono con un vértice y la mitad de uno de los lados.

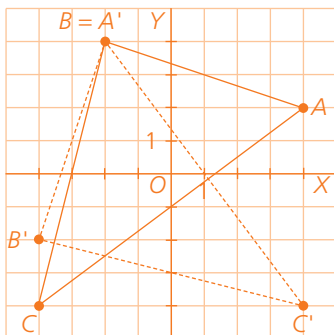
$$8^2 = 4^2 + a^2 \rightarrow a^2 = 64 - 16 = 48 \rightarrow a = \sqrt{48} = 6,93 \text{ cm}$$

$$\text{Hallamos el área aplicando la fórmula: } A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 6,93}{2} = \frac{332,64}{2} = 166,32 \text{ cm}^2$$

- 7.** Traslada la siguiente figura mediante el vector $\vec{v} = (7, -1)$.



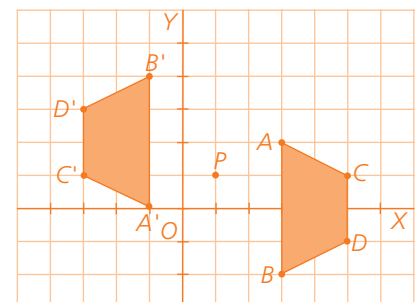
- 8.** Halla las coordenadas de los vértices de la figura que se obtiene al girar con centro O y un ángulo de 90° el triángulo que tiene por vértices $A(4, 2)$, $B(-2, 4)$ y $C(-4, -4)$.



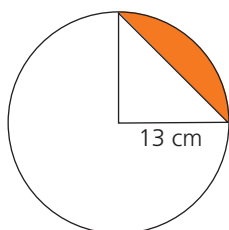
Al girar el triángulo se obtiene otro triángulo de coordenadas $A'(-2, 4)$, $B'(-4, -2)$ y $C'(4, -4)$.

- 9.** Halla la figura simétrica respecto al punto $P(1, 1)$ del cuadrilátero de vértices $A(3, 2)$, $B(3, -2)$, $C(5, 1)$ y $D(5, -1)$.

La figura simétrica es otro cuadrilátero de vértices $A'(-1, 0)$, $B'(-1, 4)$, $C'(-3, 1)$ y $D'(-3, 3)$.



- 10.** Calcula el área de la región coloreada.



El área de la región coloreada es un sector circular de 90° menos un triángulo isósceles de 13 cm base y altura. Por tanto:

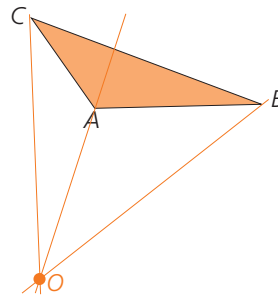
$$A = A_{\text{Sector}} - A_{\text{Triángulo}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 90}{360} - \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\pi \cdot 13^2 \cdot 90}{360} - \frac{13 \cdot 13}{2} = 132,73 - 84,5 = 48,23 \text{ cm}^2$$

TRIÁNGULOS. PROPIEDADES

Evaluación A

1. Halla gráficamente el ortocentro de este triángulo.

Recuerda
El **ortocentro** es el punto de intersección de las alturas de un triángulo.

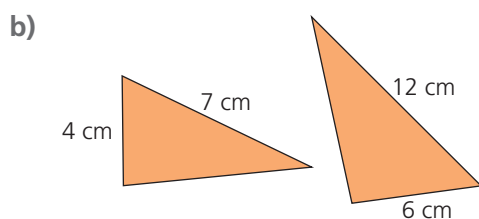
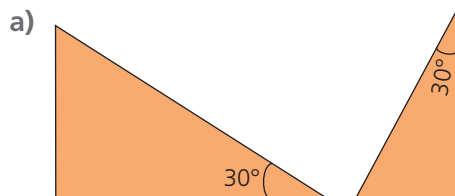


2. Una finca está delimitada por tres carreteras rectas que forman un triángulo. Queremos construir un garaje en ella de manera que la distancia a las tres carreteras sea la menor posible. ¿Dónde debemos colocarlo?

El garaje debería colocarse en el incentro de la finca, ya que es el punto que está a la misma distancia de los tres lados, es decir, de las tres carreteras.

Recuerda
El **incentro** es el punto de intersección de las bisectrices de un triángulo y equidista de los tres lados.

3. Indica razonadamente si los siguientes triángulos son semejantes.



Recuerda
Dos triángulos son semejantes si:

- Tienen los tres lados proporcionales.
- Tienen dos ángulos iguales.
- Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman coincide.

- a) Son semejantes porque tienen dos ángulos iguales: uno recto y otro de 30° .
- b) No se puede saber si son semejantes ya que falta la medida del tercer lado. Aún así podríamos decir que no son semejantes porque tienen distinta forma.

4. Los lados de un triángulo miden 6 cm, 14 cm y 18 cm. Calcula las dimensiones de otro triángulo semejante a él cuyo lado menor mida 24 cm. ¿Cuál es la razón de semejanza entre ellos?

Calculamos la razón de semejanza dividiendo las medidas de los lados correspondientes.

En este caso, $r = \frac{24}{6} = 4$ por lo que cada lado del segundo triángulo es 4 veces el lado correspondiente del primero.

Por tanto, los lados miden 24 cm, 56 cm y 72 cm, respectivamente.

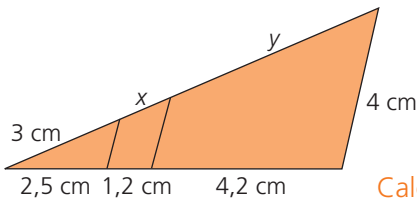
5. Halla la altura de un edificio que produce una sombra de 15 m sabiendo que, a esa misma hora, un árbol de 10 m da una sombra de 3 m.

Los triángulos que forman el edificio y el árbol con sus sombras son semejantes ya que tienen un ángulo recto cada uno y el ángulo del rayo de sol también es el mismo en los dos triángulos. Por tanto, los lados son proporcionales. Llamamos h a la altura del edificio.

$$\frac{h}{10} = \frac{15}{3} \rightarrow h = \frac{10 \cdot 15}{3} = 50$$

El edificio mide 50 m.

6. Determina los valores desconocidos de la siguiente figura.



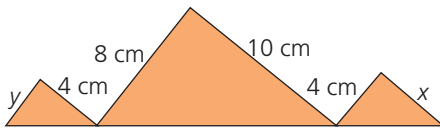
Recuerda

Teorema de Tales. Si varias rectas paralelas se cortan mediante una recta secante, los segmentos que se forman son proporcionales.

Calculamos x e y aplicando el teorema de Tales.

$$\frac{3}{2,5} = \frac{x}{1,2} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 1,2}{2,5} = 1,44 \text{ cm} \quad \frac{3}{2,5} = \frac{y}{4,2} \rightarrow y = \frac{3 \cdot 4,2}{2,5} = 5,04 \text{ cm}$$

7. Halla los valores desconocidos de esta figura.



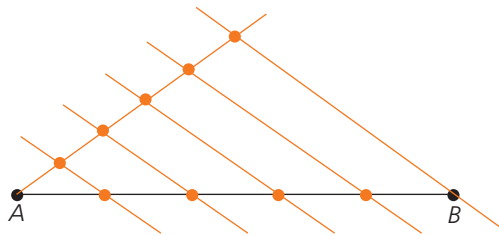
Los tres triángulos son semejantes ya que tienen los tres ángulos iguales. Por tanto, los lados tienen que ser proporcionales.

Aplicamos el teorema de Tales para hallar x e y .

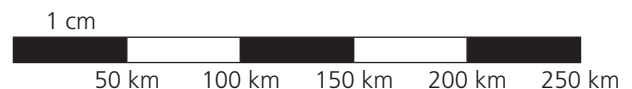
$$\frac{x}{10} = \frac{4}{8} \rightarrow x = \frac{10 \cdot 4}{8} = 5 \text{ cm}$$

$$\frac{10}{8} = \frac{4}{y} \rightarrow y = \frac{8 \cdot 4}{10} = 3,2 \text{ cm}$$

8. Divide este segmento en cinco partes iguales.



9. En un mapa aparece esta escala:



- Exprésala en forma de razón.
- Calcula la distancia real de dos ciudades si en un mapa a esa escala la distancia es 3 cm.
- Calcula la distancia en el mapa de dos ciudades si sabemos que en la realidad están a 750 km.

a) Como 1 cm equivale a 50 km, pasando a las mismas unidades tenemos que 1 cm equivale a 5 000 000 cm. Luego la escala es 1:5 000 000.

b) Del dibujo se deduce que 3 cm en el mapa equivalen a 150 km en la realidad.

c) Llamamos x a la distancia en el mapa entre las dos ciudades. Entonces, aplicando la escala tenemos:

$$x = \frac{750}{5000000} = 0,00015 \text{ km} = 15 \text{ cm}$$

Ten en cuenta

La escala relaciona las distancias expresadas en la misma unidad de medida.

10. La distancia entre Madrid y Cáceres es de 300 km. Si tenemos un mapa en el que la distancia mide 6 cm, ¿a qué escala se ha realizado dicho mapa?

Sabemos que 6 cm corresponden a 300 km.

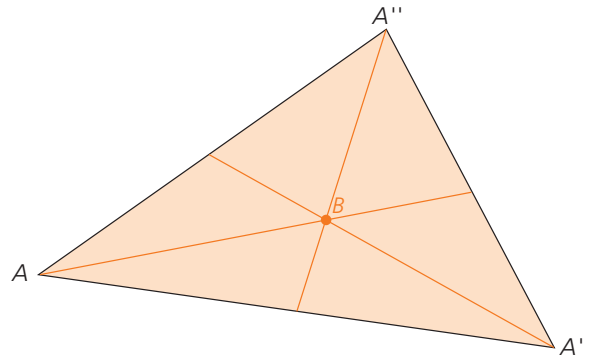
Como la escala relaciona las distancias expresadas en la misma unidad de medida, pasamos las longitudes a la misma unidad de medida: 300 km = 30 000 000 cm

$$\text{Escala} = \frac{6}{30000000} = \frac{1}{5000000} = 1:5000000. \text{ Por tanto, 1 cm en el plano equivalen a 5 000 000 cm.}$$

Evaluación B

1. Halla gráficamente el baricentro de este triángulo.

Recuerda
El **baricentro** es el punto de intersección de las medianas de un triángulo. Es el centro de gravedad del triángulo.



2. En una aldea hay solo 3 casas que forman un triángulo. Quieren colocar una farola de manera que todas las casas queden iluminadas de la misma forma. ¿Dónde habrá que colocarla?

Si la farola tiene que iluminar a todas las casas por igual, entonces tiene que estar a la misma distancia de todos los vértices del triángulo. Por tanto, la farola estará colocada en el circuncentro del triángulo.

Recuerda
El **circuncentro** es el punto de intersección de las mediatrices de un triángulo. Este punto equidista de los vértices.

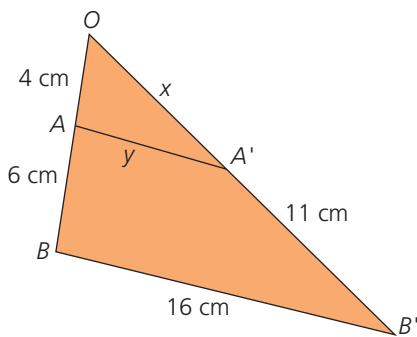
3. Los dos ángulos iguales de un triángulo isósceles tienen una amplitud de 40° y el ángulo desigual de otro triángulo isósceles mide 110° . ¿Son semejantes? Razona la respuesta.

Hallamos la amplitud del ángulo desigual del primer triángulo isósceles.

$$180^\circ - 40^\circ \cdot 2 = 100^\circ$$

En el segundo triángulo, el ángulo desigual mide 110° que es distinto al ángulo desigual del primero. Como todos los ángulos deben ser iguales, los dos triángulos no son semejantes.

4. Determina la longitud de los lados desconocidos de este triángulo.



Calculamos el valor de x aplicando el teorema de Tales.

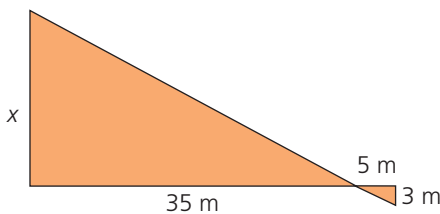
$$\frac{4}{x} = \frac{6}{11} \rightarrow x = \frac{11 \cdot 4}{6} = 7,33 \text{ cm}$$

Hallamos el valor de y teniendo en cuenta que los triángulos OAA' y OBB' son semejantes ya que tienen los ángulos iguales.

$$\frac{4}{10} = \frac{y}{16} \rightarrow y = \frac{16 \cdot 4}{10} = 6,4 \text{ cm}$$

Ten en cuenta
Para calcular la longitud del lado desconocido y , utilizaremos la semejanza del triángulo interior y el triángulo exterior.

5. Halla el valor de x en la siguiente figura.



Los dos triángulos de la figura son semejantes ya que los ángulos son iguales.

Por tanto, los lados son proporcionales.

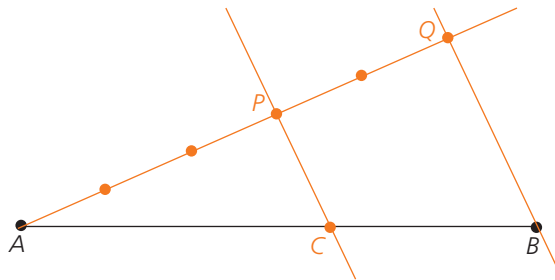
$$\text{Entonces: } \frac{x}{3} = \frac{35}{5} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 35}{5} = 21 \text{ cm}$$

6. Manolo y Antonio miden 1,86 m y 1,92 m, respectivamente. Sabiendo que en un momento del día la sombra de Manolo es de 62 cm, ¿cuánto medirá la sombra de Antonio?

Los triángulos que forman cada uno con su sombra son semejantes ya que tienen dos ángulos iguales: un ángulo recto y el ángulo del rayo de sol. Por tanto, los lados son proporcionales.

Entonces: $\frac{186}{192} = \frac{62}{x} \rightarrow x = \frac{192 \cdot 62}{186} = 64 \text{ cm}$ La sombra de Antonio mide 64 cm.

7. Divide el siguiente segmento en dos partes proporcionales a 3 y 5.



8. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- El incentro es el punto de intersección de las tres alturas de un triángulo.
 - La razón de semejanza entre los perímetros de dos polígonos es igual que la razón entre sus lados.
 - Dos triángulos semejantes tienen los tres ángulos proporcionales.
 - La escala de un plano se puede medir en centímetros.
- FALSO. El incentro es el punto de intersección de las bisectrices de un triángulo. El punto de intersección de las alturas es el ortocentro.
 - VERDADERO. Al ser el perímetro una longitud, se mantiene la razón de semejanza.
 - FALSO. Dos triángulos semejantes tienen los ángulos iguales, no proporcionales.
 - FALSO. La escala es una razón de semejanza y, por tanto, no tiene unidades.

9. Jorge ha construido una maqueta de un coche a escala 1:18. Si las dimensiones del coche al que representa son 4,5 m de largo, 2 m de ancho y 1,25 m de alto, ¿cuál serán las dimensiones de la maqueta?

Como la escala es 1:18, 1 cm en la maqueta corresponde a 18 cm en la realidad.

Pasamos las medidas a centímetros.

$$4,5 \text{ m} = 450 \text{ cm} \quad 2 \text{ m} = 200 \text{ cm} \quad 1,25 \text{ m} = 125 \text{ cm}$$

Llamamos x , y , z al largo, ancho y alto del coche de la maqueta, respectivamente.

$$x = \frac{450}{18} = 25 \text{ cm} \quad y = \frac{200}{18} = 11,11 \text{ cm} \quad z = \frac{125}{18} = 6,94 \text{ cm}$$

Las dimensiones de la maqueta son 25 cm de largo, 11,11 cm de ancho y 6,94 cm de alto.

Ten en cuenta

Recuerda que la escala relaciona longitudes expresadas en la misma unidad de medida.

10. Halla la escala de un plano en el que un segmento que mide 10 cm representa 120 m de longitud.

Sabemos que 10 cm equivalen a 120 m.

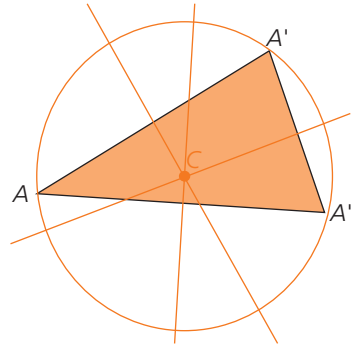
Como la escala relaciona las distancias expresadas en la misma unidad de medida, pasamos las longitudes a la misma unidad de medida: 120 m = 12 000 cm

$$\text{Escala} = \frac{10}{12000} = \frac{1}{1200} = 1 : 1200 \text{ cm}$$

Por tanto, 1 cm en el plano corresponden a 1 200 cm en la realidad.

Evaluación C

1. Halla gráficamente el circuncentro y la circunferencia circunscrita de este triángulo.

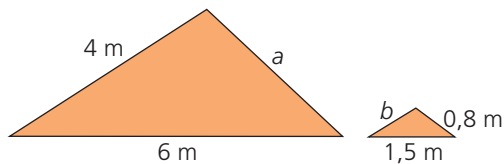


2. Dibuja un triángulo equilátero y traza en él las circunferencias inscrita y circunscrita. ¿Cómo son?

Comprobar que los alumnos dibujan un triángulo equilátero y dibujan las circunferencias inscrita y circunscrita.

Estas circunferencias son concéntricas.

3. Halla la longitud de los lados desconocidos en estos triángulos semejantes. Indica la razón de semejanza. ¿Qué indica?



Al ser triángulos semejantes, sus lados tienen que ser proporcionales. Por tanto:

$$\frac{4}{b} = \frac{6}{1,5} \rightarrow b = \frac{4 \cdot 1,5}{6} = 1 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{0,8} = \frac{6}{1,5} \rightarrow a = \frac{6 \cdot 0,8}{1,5} = 3,2 \text{ cm}$$

La razón de semejanza es 4 (se calcula dividiendo cualquier lado del primer triángulo entre el correspondiente del segundo) e indica que los lados del primer triángulo son 4 veces mayor que los del segundo.

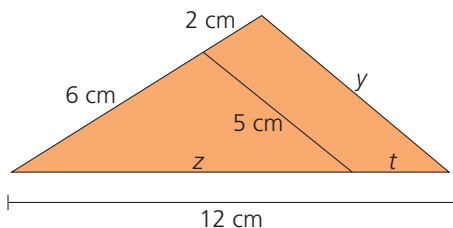
4. Un edificio de 48 m proyecta a cierta hora del día una sombra de 12 m. ¿Cuál es la altura de Alfonso si a esa misma hora su sombra mide 45 cm?

Los triángulos que forman el edificio y Alfonso con sus sombras son semejantes ya que tienen dos ángulos iguales: uno recto y el ángulo del rayo de sol. Por tanto, los lados son proporcionales.

Entonces: $\frac{48}{x} = \frac{12}{0,45} \rightarrow x = \frac{48 \cdot 0,45}{12} = 1,8 \text{ m}$

Alfonso mide 1,8 m.

5. Determina los lados desconocidos de la siguiente figura.



Calculamos z aplicando el teorema de Tales.

$$\frac{6}{z} = \frac{8}{12} \rightarrow z = \frac{12 \cdot 6}{8} = 9 \text{ cm}$$

Entonces, $t = 3 \text{ cm}$.

Ahora calculamos y teniendo en cuenta que los dos triángulos, interior y exterior, son semejantes y, por tanto, sus lados son proporcionales:

$$\frac{6}{15} = \frac{8}{y} \rightarrow y = \frac{5 \cdot 8}{6} = 6,67 \text{ cm}$$

6. Sean dos cuadrados cuyos lados miden 3 cm y 6 cm, respectivamente.

- ¿Son semejantes? Indica la razón de semejanza.
- ¿Cuál es la razón entre sus perímetros?
- ¿Cuál es la razón entre sus áreas?

a) Dos cuadrados siempre son semejantes porque sus ángulos son iguales y sus lados proporcionales. Como el lado del segundo cuadrado es el doble que el del primero, la razón de semejanza es 2.

b) El perímetro del primer cuadrado es 12 cm, y del segundo, 24 cm. Luego la razón entre sus perímetros también es 2.

c) El área del primer cuadrado es 9 cm², y el del segundo, 36 cm². Entonces, la razón entre sus áreas es 4. Siempre la razón entre áreas es el cuadrado de la razón entre longitudes.

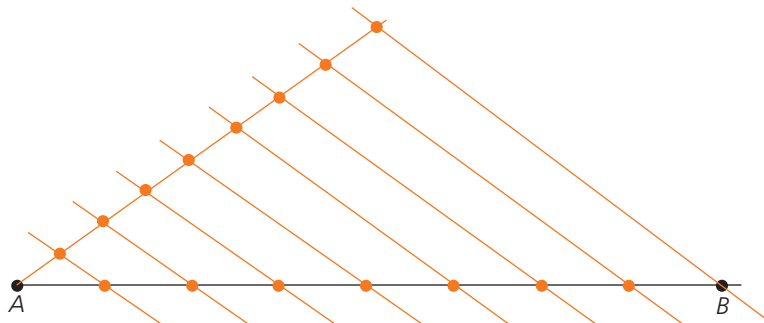
7. Un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 30° y un lado de 5 cm de longitud. Otro triángulo rectángulo tiene un ángulo 60° y un lado de 3 cm de longitud. ¿Son semejantes ambos triángulos?

Los ángulos del primer triángulo miden 90°, 30° y 60° (para que la suma de los tres sea 180°).

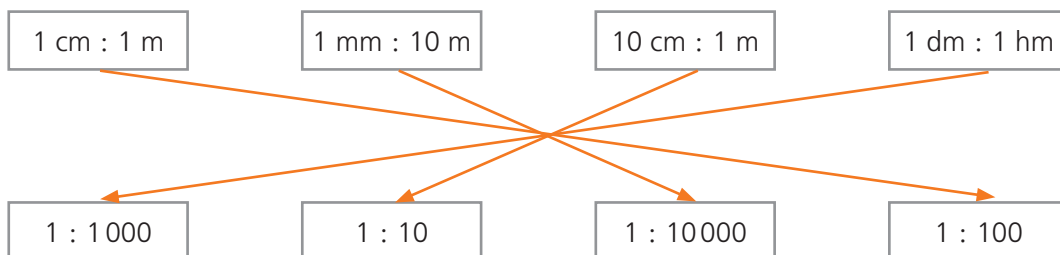
Los ángulos del segundo triángulo miden 90°, 60° y 30°.

En consecuencia, e independientemente de las medidas de los lados, los dos triángulos tienen los ángulos iguales por lo que son semejantes.

8. Divide este segmento en ocho partes iguales.



9. Relaciona cada equivalencia con su escala.



10. El paragolpes de la maqueta de un coche mide 3 cm. Si sabemos que en el coche al que representa mide 1,5 m, ¿a qué escala está hecha la maqueta?

Sabemos que 3 cm equivalen a 1,5 m.

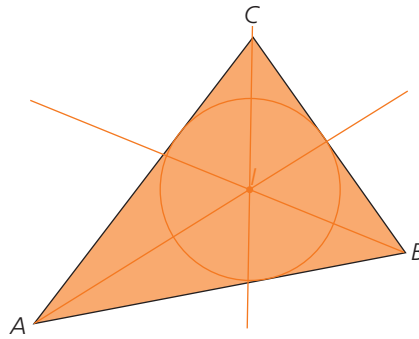
Como la escala relaciona las distancias expresadas en la misma unidad de medida, pasamos las longitudes a la misma unidad de medida: 1,5 m = 150 cm

$$\text{Escala} = \frac{3}{150} = \frac{1}{50} = 1 : 50$$

Por tanto, 1 cm en la maqueta representa 50 cm en la realidad.

Evaluación D

1. Dado el siguiente triángulo, traza el incentro y la circunferencia inscrita

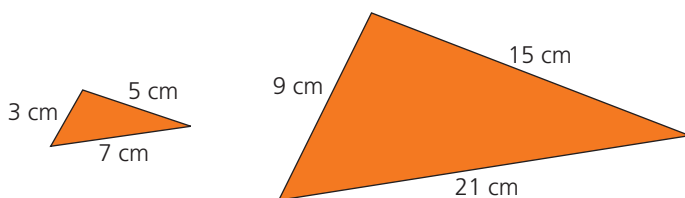


2. Hemos cortado una pieza de forma triangular en una cartulina. Si queremos que esta figura se mantenga en equilibrio apoyándola en un solo punto, ¿qué punto elegiríamos?

Como la figura tiene forma triangular, para mantenerla en equilibrio habría que apoyarla sobre su centro de gravedad, es decir, sobre su baricentro.

3. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
- Dos triángulos equiláteros siempre son semejantes.
 - Dos triángulos isósceles siempre son semejantes.
 - Dos triángulos rectángulos isósceles siempre son semejantes.
 - Dos triángulos rectángulos siempre son semejantes.
- a) VERDADERO. Al tener los tres lados iguales siempre van a tener los lados proporcionales y los ángulos iguales.
- b) FALSO. Los dos lados iguales serán proporcionales pero el lado desigual no tiene por qué serlo.
- c) VERDADERO. Tienen un ángulo igual (el recto) y los lados que lo forman son proporcionales (por ser isósceles).
- d) FALSO. Con este dato conocemos que tienen un ángulo igual. Los otros dos ángulos pueden ser distintos.
4. Explica si los siguientes pares de triángulos son semejantes.

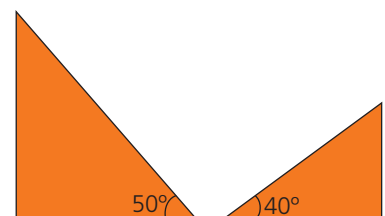
a)



a) Sí son semejantes ya que todos los lados son proporcionales.

b) Sí son semejantes ya que todos los ángulos son iguales (el primero tiene un ángulo recto, otro de 50° y, por lo tanto, el tercero es de 40° , igual que el segundo).

b)



5. Martina mide 1,8 m y quiere saber la altura de una torre. Para ello, coloca un espejo entre ella y la torre a 160 cm de sus pies y a 6,4 m de la entrada a la torre, de forma que puede ver la parte más alta de la misma reflejada en el espejo. ¿Cuánto mide la torre?

Los triángulos que forman la torre y el suelo y Martina y el suelo son semejantes ya que los ángulos son iguales.

Llamamos x a la altura de la torre.

Tras pasar todas las medidas a metros tenemos que:

$$\frac{x}{1,80} = \frac{6,40}{1,60} \rightarrow x = \frac{1,80 \cdot 6,40}{1,60} = 7,2$$

La torre mide 7,2 m.

6. Las longitudes de un triángulo escaleno son 6 cm, 8 cm y 9 cm. Halla las medidas de otro triángulo semejante sabiendo que la razón de semejanza entre sus perímetros es $\frac{1}{6}$.

La razón de semejanza entre los perímetros, al ser una longitud, es la misma que la de sus lados. Entonces, cada lado del primer triángulo es $\frac{1}{6}$ de cada lado del segundo y, en consecuencia, cada lado del segundo será 6 veces cada lado del primero.

Por tanto, los lados miden 36 cm, 48 cm y 54 cm.

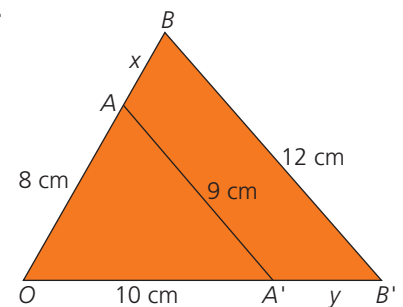
7. Determina la longitud de los lados desconocidos de estos triángulos.

El triángulo exterior OBB' es semejante al triángulo interior OAA' ya que sus ángulos son iguales y, por tanto, sus lados son proporcionales.

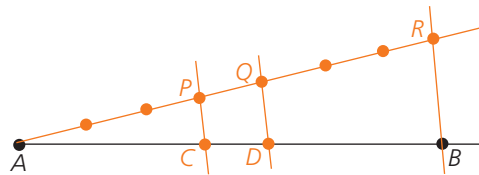
Hallamos los lados x e y aplicando el teorema de Tales.

$$\frac{8}{8+x} = \frac{9}{12} \rightarrow 8 \cdot 12 = 9(8+x) \rightarrow 96 = 72 + 9x \rightarrow x = \frac{96 - 72}{9} = 2,67 \text{ cm}$$

$$\frac{8}{10} = \frac{2,67}{y} \rightarrow y = \frac{2,67 \cdot 10}{8} = 3,34 \text{ cm}$$



8. Divide este segmento en tres partes proporcionales a 3, 4 y 7.



9. De una vivienda hemos obtenido las siguientes medidas:

Cocina: 4 m de largo y 2 m de ancho

Dormitorio: 4 m de largo y 3 m de ancho

Salón: 5 m de largo y 3 m de ancho

Halla las medidas que tendrán estas habitaciones en un plano hecho a escala 1:50.

La escala 1:50 significa que las medidas reales son 50 veces las medidas del plano, por lo que para calcularlas, simplemente dividiremos entre 50 cada una de las medidas.

Cocina: $0,08 \text{ m} = 8 \text{ cm}$ de largo y $0,04 \text{ m} = 4 \text{ cm}$ de ancho

Dormitorio: $0,08 \text{ m} = 8 \text{ cm}$ de largo y $0,06 \text{ m} = 6 \text{ cm}$ de ancho

Salón: $0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$ de largo y $0,06 \text{ m} = 6 \text{ cm}$ de ancho

10. Dos pueblos que en línea recta se encuentran a una distancia de 10 km, están separados en un mapa por 2 cm de distancia. ¿A qué escala está hecho dicho mapa?

Sabemos que 2 cm equivalen a 10 km.

Como la escala relaciona las distancias expresadas en la misma unidad de medida, pasamos las longitudes a la misma unidad de medida: $10 \text{ km} = 1\,000\,000 \text{ cm}$

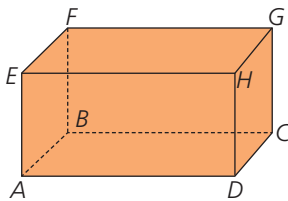
$$\text{Escala} = \frac{2}{1\,000\,000} = \frac{1}{500\,000} = 1 : 500\,000$$

Por tanto, 1 cm en la maqueta representa 500 000 cm en la realidad.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO. POLIEDROS

Evaluación A

1. Indica las caras, vértices y aristas de esta figura. ¿Qué posición tienen entre sí las rectas que forman las aristas AB y EH ? ¿Y las caras $ABCD$ y $EFGH$?



Caras: $ABCD$, $EFGH$, $AEFB$, $DHGC$, $AEHD$, $BFGC$

Vértices: A , B , C , D , E , F , G , H

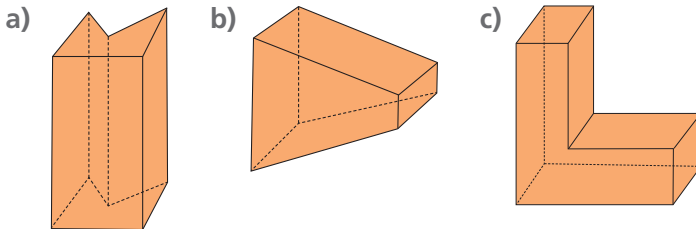
Aristas: AD , BC , EH , FG , AB , DC , EF , HG , AE , DH , BF , CG

Las rectas AB y EH se cruzan. Las caras $ABCD$ y $EFGH$ son paralelas.

Ten en cuenta

Las caras y las aristas las nombramos mediante los vértices que las forman.

2. Clasifica estos poliedros en cóncavos o convexos.



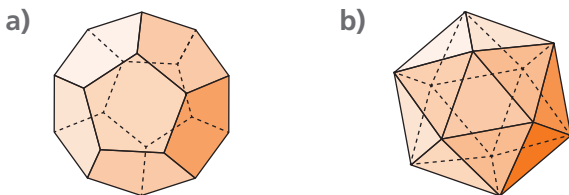
- a) Cóncavo b) Convexo c) Cóncavo

Recuerda

■ **Convexo:** cualquier segmento que une dos puntos está contenido en él.

■ **Cóncavo:** se puede trazar un segmento uniendo dos puntos y no queda contenido en él.

3. Comprueba que se verifica el teorema de Euler en estos poliedros.



Recuerda

Teorema de Euler

En un poliedro convexo, $C + V = A + 2$ donde C es el número de caras, V número de vértices y A número de aristas.

- a) El dodecaedro tiene 12 caras, 30 aristas y 20 vértices. Se cumple el teorema de Euler: $12 + 20 = 30 + 2$
 b) El icosaedro tiene 20 caras, 30 aristas y 12 vértices. Se cumple el teorema de Euler: $20 + 12 = 30 + 2$

4. Dibuja un prisma que tenga 12 vértices.

Comprobar que los alumnos dibujan un prisma hexagonal ya que los vértices de un prisma son los vértices que tienen las dos bases.

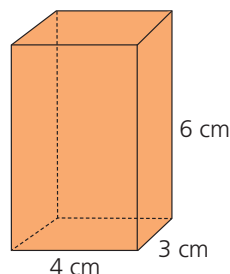
5. Halla el área total y volumen del prisma de la figura.

$$A_b = b \cdot h = 4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}^2$$

$$A_L = P \cdot h = 14 \cdot 6 = 84 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2A_b = 84 + 2 \cdot 12 = 108 \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h = 12 \cdot 6 = 72 \text{ cm}^3$$



Recuerda

Área y volumen de prismas:

$$A_L = P \cdot h$$

$$A_T = A_L + 2A_b$$

$$V = A_b \cdot h$$

6. Halla la diagonal de un cubo si el área total es 150 m².

En primer lugar, hallamos la medida del lado del cubo. El área del cubo es 6 veces el área de una cara.

$$A = 6 \cdot l^2 = 150 \rightarrow l^2 = \frac{150}{6} = 25 \rightarrow l = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Cada lado mide 5 cm. Aplicando el teorema de Pitágoras, hallamos la longitud de la diagonal de la base: $d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow d^2 = 5^2 + 5^2 \rightarrow d^2 = 50 \rightarrow d = \sqrt{50} = 7,07 \text{ cm}$

Aplicamos de nuevo Pitágoras para hallar D : $D^2 = d^2 + l^2 \rightarrow D^2 = 7,07^2 + 5^2 \rightarrow D^2 = 75 \rightarrow D = \sqrt{75} = 8,66 \text{ cm}$
Por tanto, la diagonal del cubo mide 8,66 cm.

7. Completa la siguiente tabla sobre clasificación de pirámides.

Pirámide	Tipo	Recta u oblicua	Regular o irregular	Cóncava o convexa
	Cuadrangular	Recta	Regular	Convexa
	Hexagonal	Recta	Irregular	Cóncava
	Pentagonal	Oblicua	Regular	Convexa
	Cuadrangular	Recta	Irregular	Convexa

8. Halla el área total y el volumen de una pirámide regular pentagonal cuyo lado de la base mide 12 cm, la apotema de la base 8,26 cm y la apotema de la pirámide 16 cm.

$$A_b = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{12 \cdot 5 \cdot 8,26}{2} = 247,8 \text{ cm}^2$$

$$A_L = \frac{P \cdot A_p}{2} = \frac{12 \cdot 5 \cdot 16}{2} = 480 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_b + A_L = 247,8 + 480 = 727,8 \text{ cm}^2$$

Por tanto, el área total es de 727,8 cm².

$$h^2 = A_p^2 - a^2 = 16^2 - 8,26^2 = 187,77 \rightarrow h = \sqrt{187,77} = 13,7 \text{ cm}$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{247,8 \cdot 13,7}{3} = 1131,62 \text{ cm}^3 \quad \text{Por tanto, el volumen es de } 1131,62 \text{ cm}^3.$$

Recuerda

Área y volumen de pirámides:

$$A_L = \frac{P \cdot A_p}{2}$$

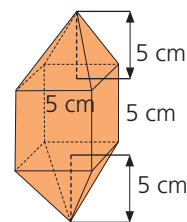
$$A_T = A_b + A_L$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

9. Halla el volumen de la siguiente figura.

La figura se compone de un cubo y dos pirámides, por tanto:

$$V_T = V_C + 2 \cdot V_p = l^3 + 2 \cdot \frac{A_b \cdot h}{3} = 5^3 + 2 \cdot \frac{5^2 \cdot 5}{3} = 208,33 \text{ cm}^3$$



10. Halla la altura de una pirámide de base cuadrada de lado 4 cm si sabemos que su volumen es 96 cm³.

Si llamamos h a la altura, tenemos: $V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{4^2 \cdot h}{3} = 96 \text{ cm}^3$

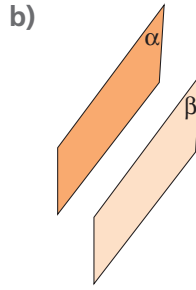
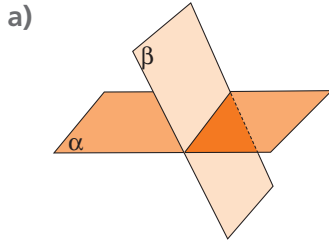
Resolviendo la ecuación: $\frac{4^2 \cdot h}{3} = 96 \rightarrow h = \frac{96 \cdot 3}{16} = 18 \text{ cm}$

Ten en cuenta

Sustituye los datos en la fórmula del volumen y resuelve la ecuación.

Evaluación B

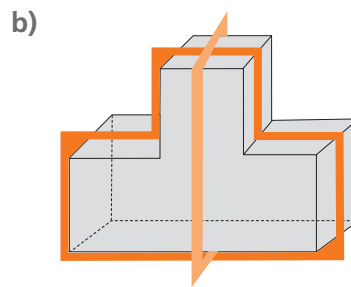
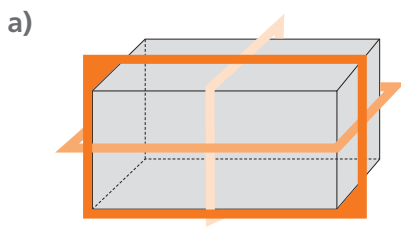
1. Determina la posición relativa entre los planos α y β .



a) Los planos son secantes.

b) Los planos son paralelos.

2. Dibuja los planos de simetría de los siguientes poliedros.



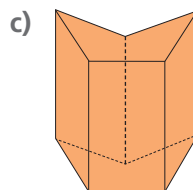
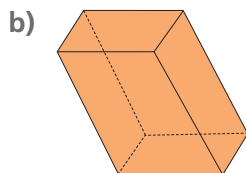
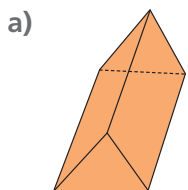
Recuerda

Un plano de simetría es un plano que divide al poliedro en dos partes iguales.

3. Completa la tabla y comprueba que se verifica el teorema de Euler.

	N.º de caras	N.º de vértices	N.º de aristas	T. de Euler
	4	4	6	$4 + 4 = 6 + 2$
	6	8	12	$6 + 8 = 12 + 2$
	8	6	12	$8 + 6 = 12 + 2$

4. Clasifica estos prismas según su base; si son rectos u oblicuos; regulares o irregulares; y cóncavos o convexos.

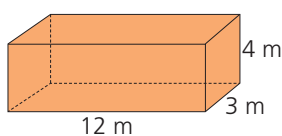


a) Prisma triangular recto, regular y convexo.

b) Prisma rectangular oblicuo, irregular y convexo.

c) Prisma pentagonal recto, irregular y cóncavo.

5. Calcula la diagonal de la siguiente figura.



Aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$d^2 = 12^2 + 3^2 + 4^2 = 169 \rightarrow d = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

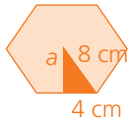
La diagonal mide 13 cm.

Recuerda

Teorema de Pitágoras en el espacio:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

6. Halla el área total y el volumen de un prisma hexagonal regular cuyo lado de la base mide 8 y la altura 6 cm.



Calculamos la apotema de la base mediante el teorema de Pitágoras.

$$a^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48 \rightarrow a = \sqrt{48} = 6,93 \text{ cm}$$

$$A_b = A_{\text{HEXÁGONO}} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6,93}{2} = 124,74 \text{ cm}^2$$

$$A_L = P \cdot h = 6 \cdot 6 \cdot 8 = 288 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2A_b = 288 + 2 \cdot 124,74 = 537,48 \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h = 124,74 \cdot 8 = 997,92 \text{ cm}^3$$

7. ¿Cuál es el área total y el volumen de una pirámide hexagonal regular cuyo lado de la base mide 5 cm y la arista lateral 12 cm?

Calculamos la apotema de la base, a , la apotema de la pirámide, A_p , y la altura, h .

$$a^2 = 5^2 - 2,5^2 \rightarrow a^2 = 25 - 6,25 = 18,75 \rightarrow a = \sqrt{18,75} = 4,33 \text{ cm}$$

$$A_p^2 = 12^2 - 2,5^2 \rightarrow A_p^2 = 144 - 6,25 = 137,75 \rightarrow A_p = \sqrt{137,75} = 11,74 \text{ cm}$$

$$h^2 = 12^2 - 5^2 \rightarrow h^2 = 144 - 25 = 119 \rightarrow h = \sqrt{119} = 10,91 \text{ cm}$$

Ahora calculamos el área y el volumen.

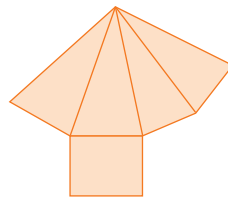
$$A_b = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4,33}{2} = 64,95 \text{ cm}^2$$

$$A_L = \frac{P \cdot A_p}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 11,74}{2} = 176,1 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_b + A_L = 64,95 + 176,1 = 241,05 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{64,95 \cdot 10,91}{3} = 236,2 \text{ cm}^3$$

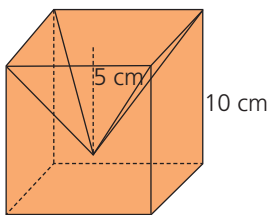
8. Dibuja el desarrollo plano de una pirámide cuadrangular recta y regular.



Ten en cuenta

El desarrollo plano de un poliedro es la figura formada por los polígonos de sus caras.

9. Halla el área total y el volumen de esta figura.



Para hallar el área total de la figura sumamos el área de 5 caras del cubo y el área de las caras laterales de la pirámide. La apotema de la pirámide la calculamos por Pitágoras: $A_p^2 = 5^2 + 5^2 = 50 \rightarrow A_p = \sqrt{50} = 7,07 \text{ cm}$. Por tanto:

$$A_T = A_{\text{CUBO}} + A_{\text{PIRÁMIDE}} = 5l^2 + \frac{P \cdot A_p}{2} = 5 \cdot 10^2 + \frac{4 \cdot 10 \cdot 7,07}{2} = 500 + 141,4 = 641,4 \text{ cm}^2$$

Para hallar el volumen restamos el volumen de la pirámide a la del cubo.

$$V_T = V_{\text{CUBO}} - V_{\text{PIRÁMIDE}} = l^3 - \frac{A_b \cdot h}{3} = 10^3 - \frac{10^2 \cdot 5}{3} = 1000 - 166,67 = 833,33 \text{ cm}^3$$

10. Halla el área y volumen de un tronco de pirámide recta de bases cuadradas de lados 4 cm y 6 cm, y apotema del tronco 5 cm.

Calculamos la altura del tronco de pirámide por Pitágoras.

$$h^2 = 5^2 - l^2 = 24 \rightarrow h = \sqrt{24} = 4,9 \text{ cm}$$

Calculamos el área, formada por las dos bases y cuatro trapezios.

$$A_T = A_{b_1} + A_{b_2} + A_L = l_1^2 + l_2^2 + 4 \cdot \frac{(B_1 + B_2) \cdot a}{2} = 6^2 + 4^2 + \frac{(6 + 4) \cdot 5}{2} = 36 + 16 + 25 = 77 \text{ cm}^2$$

$$\text{Calculamos el volumen: } V = \frac{(A_{b_1} + A_{b_2} + \sqrt{A_{b_1} \cdot A_{b_2}}) \cdot h}{3} = \frac{(6^2 + 4^2 + \sqrt{6^2 \cdot 4^2}) \cdot 4,9}{3} = 124,13 \text{ cm}^3$$

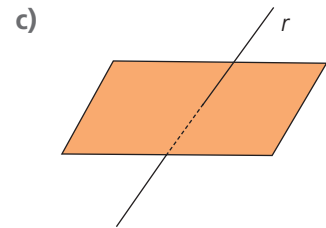
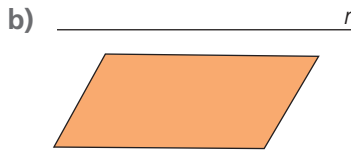
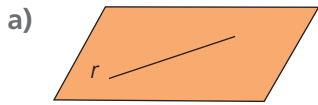
Recuerda

Volumen de un tronco de pirámide:

$$V = \frac{(A_{b_1} + A_{b_2} + \sqrt{A_{b_1} \cdot A_{b_2}}) \cdot h}{3}$$

Evaluación C

1. Determina la posición relativa de estas rectas y planos.



- a) Recta contenida en el plano. b) Recta y plano paralelos. c) Recta y plano secantes.

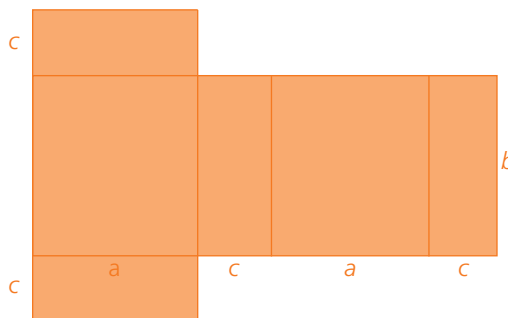
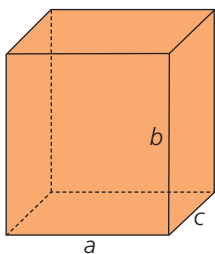
2. Dibuja un poliedro cóncavo y otro convexo con 12 aristas cada uno.

Comprobar que los alumnos dibujan un poliedro con 12 aristas donde cualquier segmento que une dos de sus puntos está contenido en él, y otro con 12 aristas donde se puede trazar un segmento que una dos de sus puntos que no esté contenido en él.

3. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta que se trata de poliedros convexos y que cumplen el teorema de Euler.

Poliedro	N.º de caras	N.º de vértices	N.º de aristas
A	8	6	12
B	12	20	30
C	6	5	9
D	5	5	8

4. Observa este ortoedro y dibuja su desarrollo plano.



5. Calcula el área total y el volumen de un prisma de 7 cm de altura cuyas bases son triángulos equiláteros de 5 cm de lado.

Para hallar el área de las bases, tenemos en cuenta el triángulo rectángulo que corresponde a la mitad de cada base. Mediante el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 5^2 - 2,5^2 = 25 - 6,25 = 18,75 \rightarrow h = \sqrt{18,75} = 4,33 \text{ cm}$$

$$A_b = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 4,33}{2} = 10,83 \text{ cm}^2$$

$$A_L = P \cdot h = 5 \cdot 3 \cdot 7 = 105 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2A_b = 105 + 2 \cdot 10,83 = 126,66 \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h = 10,83 \cdot 7 = 75,81 \text{ cm}^3$$

- 6.** Calcula la cantidad de acero que se necesita para construir un cubo de 10 m de arista sin tapa.

Para calcular la cantidad de acero tenemos que calcular el área las 5 caras que tenemos que cubrir.

$$A = 5 \cdot l^2 = 5 \cdot 10^2 = 500 \text{ m}^2$$

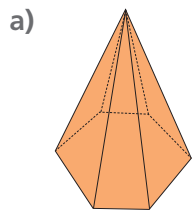
Necesitamos 500 m² de acero.

- 7.** Averigua la altura de un ortoedro cuya base mide 80 cm de largo y 50 cm de ancho y, además, en él se pueden introducir hasta 360 L de agua.

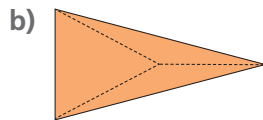
Sabemos que 1 L = 1 dm³. Por tanto, 360 L de agua equivalen a un volumen de 360 dm³, o lo que es lo mismo, 360 000 cm³. Hallamos qué altura corresponde a un volumen de 360 000 cm³.

$$V = a \cdot b \cdot h = 80 \cdot 50 \cdot h = 360\,000 \rightarrow 4000 \cdot h = 360\,000 \rightarrow h = \frac{360\,000}{4000} = 90 \text{ cm}$$

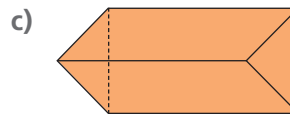
- 8.** Clasifica los siguientes poliedros según sean prismas o pirámides.



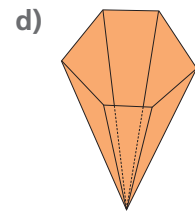
a) Pirámide



b) Pirámide



c) Prisma



d) Pirámide

- 9.** Calcula el área total y el volumen de una pirámide de altura 4 cm cuya base es un hexágono regular de lado 8 cm.

En primer lugar vamos a calcular la apotema de la base, a , y la apotema de la pirámide, A_p , mediante el teorema de Pitágoras.

$$a^2 = 8^2 - 4^2 \rightarrow a^2 = 64 - 16 = 48 \rightarrow a = \sqrt{48} = 6,93 \text{ cm}$$

$$A_p^2 = 4^2 + 6,93^2 \rightarrow A_p^2 = 16 + 48 = 64 \rightarrow A_p = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$

Ahora, calculamos el área y el volumen.

$$A_b = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 6,93}{2} = 166,32 \text{ cm}^2$$

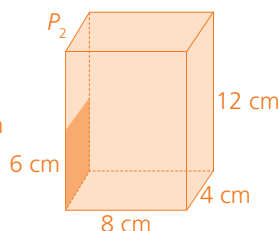
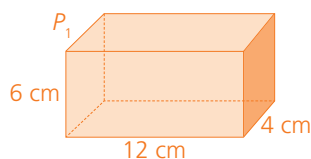
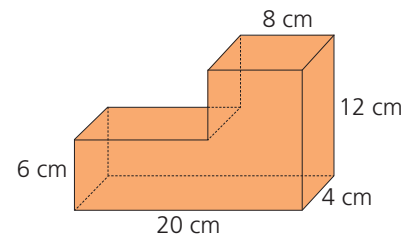
$$A_L = \frac{P \cdot A_p}{2} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 8}{2} = 192 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_b + A_L = 166,32 + 192 = 358,32 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{166,32 \cdot 4}{3} = 221,76 \text{ cm}^3$$

- 10.** Halla el área total y el volumen de la siguiente figura.

En primer lugar, dividimos la figura inicial en dos prismas P_1 y P_2 . Para calcular el área de la figura, sumamos las áreas de los dos prismas y restamos el área de la zona coloreada, ya que es interior en los dos prismas. Para calcular el volumen, simplemente sumamos los volúmenes de los dos prismas.



$$A_{P_1} = A_L + 2A_b - 6 \cdot 4 = 32 \cdot 6 + 2 \cdot 12 \cdot 4 - 6 \cdot 4 = 264 \text{ cm}^2$$

$$A_{P_2} = A_L + 2A_b - 6 \cdot 4 = 24 \cdot 12 + 2 \cdot 8 \cdot 4 - 6 \cdot 4 = 328 \text{ cm}^2$$

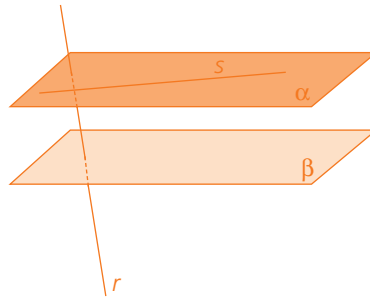
$$A_T = A_{P_1} + A_{P_2} = 264 + 328 = 592 \text{ cm}^2$$

$$V_T = V_{P_1} + V_{P_2} = A_{P_1} \cdot h_1 + A_{P_2} \cdot h_2 = 12 \cdot 4 \cdot 6 + 8 \cdot 4 \cdot 12 = 288 + 384 = 672 \text{ cm}^3$$

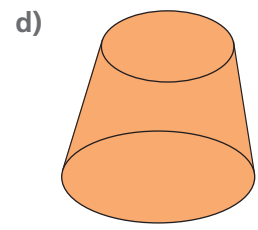
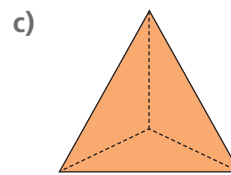
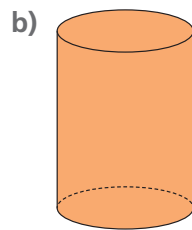
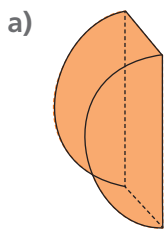
Evaluación D

1. Dibuja dos planos paralelos, una recta secante a ellos, y otra recta que esté contenida en uno de los planos y se cruce con la anterior.

Respuesta abierta.



2. ¿Cuáles de las siguientes figuras no son poliedros? Explica por qué.

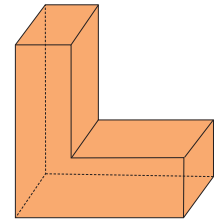


Los poliedros son figuras cuyas caras son polígonos. Por tanto, la figura que tenga una cara con líneas curvas no será un poliedro.

- a) No es poliedro. b) No es poliedro. c) Sí es poliedro. d) No es poliedro.

3. Observa esta figura y contesta a las siguientes preguntas.

- a) La figura, ¿es cóncava o convexa?
 b) ¿Se cumple el teorema de Euler?
 c) En vista de tus respuestas anteriores, ¿se contradice el teorema de Euler?



- a) Es cóncava.
 b) La figura tiene 8 caras, 12 vértices y 18 aristas, por tanto $8 + 12 = 18 + 2$ y sí se cumple el teorema de Euler.
 c) El teorema de Euler dice que en un poliedro convexo, se cumple $C + V = A + 2$, pero no dice que si el poliedro no es convexo no se cumpla, por tanto, no se contradice.

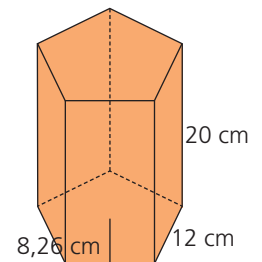
4. Halla el área y el volumen de este prisma pentagonal regular.

$$A_b = A_{\text{PENTÁGONO}} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{12 \cdot 5 \cdot 8,26}{2} = 247,8 \text{ cm}^2$$

$$A_L = P \cdot h = 12 \cdot 5 \cdot 20 = 1200 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2A_b = 1200 + 2 \cdot 247,8 = 1695,6 \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h = 247,8 \cdot 20 = 4956 \text{ cm}^3$$



5. Calcula los litros de agua que caben en un prisma hexagonal de 7 cm de lado y 10 cm de altura.

Para calcular los litros de agua que caben, calculamos el volumen del prisma.

Necesitamos calcular la apotema de la base. Lo hacemos mediante el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = 7^2 - 3,5^2 = 49 - 12,25 = 36,75 \rightarrow a = \sqrt{36,75} = 6,06 \text{ cm}$$

$$\text{Por tanto, el volumen es: } V = A_b \cdot h = \frac{P \cdot a}{2} \cdot h = \frac{6 \cdot 7 \cdot 6,06}{2} \cdot 10 = 1272,6 \text{ cm}^3 = 1272,6 \text{ ml} = 1,2726 \text{ L}$$

Caben 1,2726 L.

6. Dibuja una pirámide que tenga 12 aristas.

En una pirámide, las aristas están en la base y en cada una de las caras laterales partiendo de cada vértice de la base.

Como la pirámide tiene que tener 12 aristas, comprobar que los alumnos dibujen una pirámide hexagonal.

7. Halla el área total y el volumen de una pirámide de base cuadrada de 4 cm de lado cuya altura es 10 cm.

En primer lugar, calculamos la apotema de la pirámide, A_p , mediante el teorema de Pitágoras, tomando como catetos la altura y la mitad de la base.

$$A_p^2 = 10^2 + 2^2 = 100 + 4 = 104 \rightarrow A_p = \sqrt{104} = 10,2 \text{ cm}$$

Después, calculamos el área y el volumen.

$$A_b = l^2 = 4^2 = 16 \text{ cm}^2$$

$$A_L = \frac{P \cdot A_p}{2} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 10,2}{2} = 81,6 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_b + A_L = 16 + 81,6 = 97,6 \text{ cm}^2$$

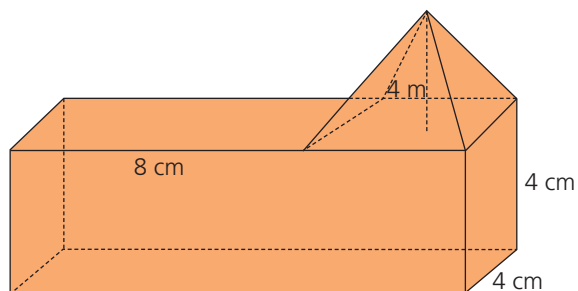
$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{16 \cdot 10}{3} = 53,33 \text{ cm}^3$$

8. Halla el volumen de la pirámide de Keops en Egipto, si sabemos que tiene una base cuadrada de 230 m de lado y una altura de 146 m.

Para hallar este volumen simplemente aplicamos la fórmula, ya que tenemos todos los datos.

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{230^2 \cdot 146}{3} = 2574466,67 \text{ m}^3$$

9. Halla el área total y volumen de la siguiente figura.



El único dato que nos falta es la apotema de la pirámide, que se calcula mediante el teorema de Pitágoras utilizando como catetos la mitad de la base de la pirámide y su altura.

$$A_p^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20 \rightarrow A_p = \sqrt{20} = 4,47 \text{ cm}$$

El área de la figura será el área del prisma más el área lateral de la pirámide menos el área de la base de la pirámide, ya que esa cara falta en el prisma.

Calculamos el volumen total sumando los volúmenes del prisma y la pirámide.

$$A_{PRISMA} = A_L + 2A_b = 32 \cdot 4 + 2 \cdot 12 \cdot 4 = 224 \text{ cm}^2$$

$$A_{LPIRÁMIDE} = \frac{16 \cdot 4,47}{2} = 35,76 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_{PRISMA} + A_{LPIRÁMIDE} - A_{BPIRÁMIDE} = 224 + 35,76 - 42 = 243,76 \text{ cm}^2$$

$$V_T = V_{PRISMA} + V_{PIRÁMIDE} = 12 \cdot 4 \cdot 4 + \frac{4^2 \cdot 4}{3} = 213,33 \text{ cm}^3$$

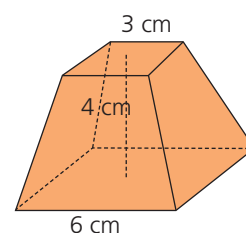
10. Un contenedor tiene la forma de la figura. ¿Se puede introducir en él un cuarto de litro de agua?

La figura es un tronco de pirámide y tenemos que calcular su volumen.

Para calcular el volumen utilizamos la fórmula.

$$V = \frac{(A_{b1} + A_{b2} + \sqrt{A_{b1} \cdot A_{b2}}) \cdot h}{3} = \frac{(6^2 + 3^2 + \sqrt{6^2 \cdot 3^2}) \cdot 4}{3} = 84 \text{ cm}^3$$

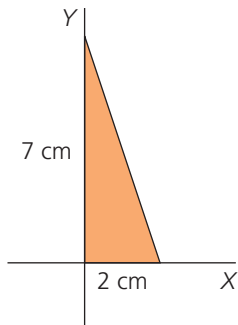
Como equivale 84 ml de agua, no podremos introducir un cuarto de litro.



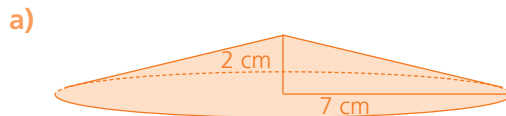
CUERPOS DE REVOLUCIÓN

Evaluación A

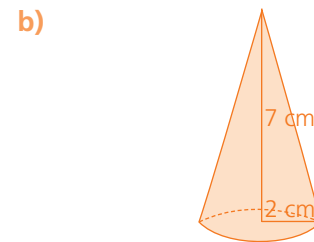
1. Dibuja.



a) El cuerpo geométrico que se obtiene al girar el triángulo sobre el eje horizontal.



b) El cuerpo geométrico que se obtiene al girar el triángulo sobre el eje vertical.



2. Halla el área y el volumen de un cilindro de 6 cm de diámetro y 12 cm de altura.

Como el diámetro es 6 cm, el radio será de 3 cm.

Sustituyendo los datos en las fórmulas:

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 12 = 226,19 \text{ cm}^2$$

$$A_b = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 3^2 = 28,27 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2A_b = 226,19 + 2 \cdot 28,27 = 282,73 \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h = 28,27 \cdot 12 = 339,24 \text{ cm}^3$$

Recuerda

Área total de un cilindro recto:

$$A_T = A_L + 2A_b = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

Volumen de un cilindro recto:

$$V = A_b \cdot h$$

3. Calcula la altura de un cilindro sabiendo que su volumen es 502,4 m³, y su diámetro, 8 m.

Sustituyendo los datos en la fórmula del volumen y tomando el radio de 4 m, tenemos que:

$$V = A_b \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h \rightarrow 502,4 = \pi \cdot 4^2 \cdot h \rightarrow 502,4 = 50,24 \cdot h \rightarrow h = \frac{502,4}{50,24} = 10 \text{ m}$$

4. Halla el área y el volumen de un cono de 5 cm de radio y 10 cm de altura.

Calculamos la generatriz del cono aplicando el teorema de Pitágoras con el radio y la altura.

$$g^2 = r^2 + h^2 = 5^2 + 10^2 = 125 \rightarrow g = \sqrt{125} = 11,18 \text{ cm}$$

Sustituyendo los datos en las fórmulas:

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 5 \cdot 11,18 = 175,62 \text{ cm}^2$$

$$A_b = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 5^2 = 78,54 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_b = 175,62 + 78,54 = 254,16 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{78,54 \cdot 10}{3} = 261,8 \text{ cm}^3$$

Recuerda

Área total de un cono recto:

$$A_T = A_L + A_b = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$$

Volumen de un cono recto:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

5. Queremos comprar tela para forrar una tienda de campaña de forma cónica de 4 m de diámetro y 4 m de altura. Si el metro cuadrado de tela cuesta 21 €, ¿cuánto gastaremos en la tienda?

Calculamos el área total de la tienda, ya que tanto la base como el lateral están forrados.

Hallamos la generatriz del cono mediante el teorema de Pitágoras con la altura y el radio (2 m).

$$g^2 = r^2 + h^2 = 2^2 + 4^2 = 20 \rightarrow g = \sqrt{20} = 4,47 \text{ m}$$

$$A_T = A_L + A_b = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 2 \cdot 4,47 + \pi \cdot 2^2 = 28,09 + 12,57 = 40,66 \text{ m}^2$$

Por tanto, gastaremos $40,66 \cdot 21 = 853,86$ €.

- 6.** Halla el área total y el volumen de un tronco de cono de 10 m de altura cuyas bases tienen 4 m y 9 m de diámetro.

Calculamos la generatriz mediante el teorema de Pitágoras.

$$g^2 = 10^2 + (4,5 - 2)^2 = 106,25 \rightarrow g = \sqrt{106,25} = 10,31 \text{ m}$$

Sustituyendo los datos en las fórmulas:

$$A_L = \pi \cdot (R + r) \cdot g = \pi \cdot (4,5 + 2) \cdot 10,31 = 210,53 \text{ m}^2$$

$$A_b = \pi \cdot (R^2 + r^2) = \pi \cdot (4,5^2 + 2^2) = 76,18 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_L + A_b = 210,53 + 76,18 = 286,71 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{\pi \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r) \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot (4,5^2 + 2^2 + 4,5 \cdot 2) \cdot 10}{3} = 348,19 \text{ m}^3$$

Recuerda

Área total de un tronco de cono:

$$A_T = A_L + A_b = \pi \cdot (R + r) \cdot g + \pi \cdot (R^2 + r^2)$$

Volumen de un tronco cono:

$$V = \frac{\pi \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r) \cdot h}{3}$$

- 7.** Corrige las afirmaciones que no sean verdaderas.

- a) Una esfera no tiene desarrollo plano.
- b) Si cortamos una esfera por un plano que no pasa por el centro se obtienen dos casquetes esféricos.
- c) Al cortar una esfera por un plano que pasa por el centro se obtiene una cuña esférica.
- d) Cualquier círculo máximo contiene al centro de la esfera.

a) VERDADERO

b) VERDADERO

c) FALSO. Al cortar una esfera por un plano que pasa por el centro se obtiene una semiesfera.

d) VERDADERO

- 8.** Halla el área y el volumen de una esfera de 10 cm de radio.

Sustituyendo los datos en las fórmulas:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 10^2 = 1256,64 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^3}{3} = 4188,79 \text{ cm}^3$$

Recuerda

Área de una esfera: $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

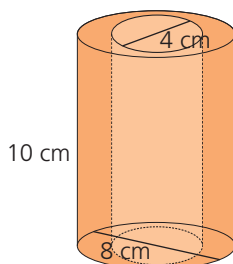
Volumen de una esfera: $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$

- 9.** Calcula la cantidad de material que tiene un balón de 30 cm de diámetro.

Para calcular la cantidad de material, tenemos que hallar el área de una esfera de 30 cm de diámetro, es decir, de 15 cm de radio.

$$\text{Sustituyendo en la fórmula: } A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 15^2 = 2827,43 \text{ cm}^2$$

- 10.** Halla el área y el volumen de la figura comprendida entre los dos cilindros.



El área de la figura está formada por dos bases iguales, que son dos coronas circulares, y las áreas laterales de los dos cilindros, una exterior y otra interior.

$$A_b = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot (4^2 - 2^2) = 37,7 \text{ cm}^2$$

$$A_L = A_{L_{\text{Cilindro1}}} - A_{L_{\text{Cilindro2}}} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10 + 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10 = 376,99 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 2A_b + A_L = 2 \cdot 37,7 + 376,99 = 452,39 \text{ cm}^2$$

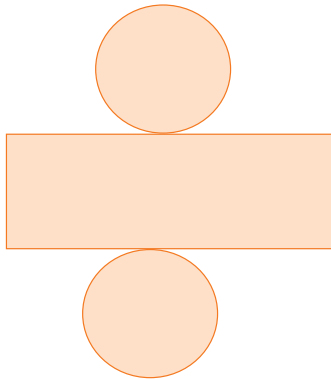
El volumen de la figura es la diferencia entre los volúmenes de los dos cilindros.

$$V = V_{\text{Cilindro1}} - V_{\text{Cilindro2}} = \pi \cdot R^2 \cdot h - \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 4^2 \cdot 10 - \pi \cdot 2^2 \cdot 10 = 502,65 - 125,66 = 376,99 \text{ cm}^3$$

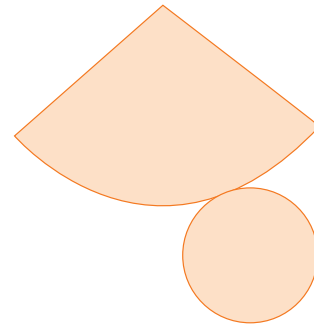
Evaluación B

1. Dibuja el desarrollo plano de un cilindro y de un cono.

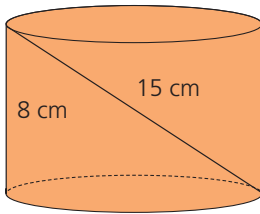
Desarrollo plano de un cilindro



Desarrollo plano de un cono



2. Halla el área y el volumen de este cilindro.



Con los datos de la figura podemos calcular el diámetro mediante el teorema de Pitágoras.

$$15^2 = 8^2 + d^2 \rightarrow d^2 = 15^2 - 8^2 = 225 - 64 = 161 \rightarrow d = \sqrt{161} = 12,69 \text{ cm}$$

Por tanto, el radio mide $12,69 : 2 = 6,35 \text{ cm}$.

Sustituyendo los datos en las fórmulas tenemos:

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 6,35 \cdot 8 = 319,19 \text{ cm}^2 \quad A_b = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 6,35^2 = 126,68 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2A_b = 319,19 + 2 \cdot 126,68 = 572,55 \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h = 126,68 \cdot 8 = 1013,44 \text{ cm}^3$$

3. Calcula el radio de un cilindro sabiendo que su altura es 8 cm, y su volumen, 628 cm³.

Sustituyendo los datos en la fórmula del volumen tenemos: $V = A_b \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h \rightarrow$

$$\rightarrow 628 = \pi \cdot r^2 \cdot 8 \rightarrow 628 = 25,12 \cdot r^2 \rightarrow r^2 = \frac{628}{25,12} = 25 \rightarrow r = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Ten en cuenta

Sustituye los datos en la fórmula del volumen y resuelve la ecuación.

4. Halla el área y el volumen de un cono de 12 cm de altura y 15 cm de generatriz.

Calculamos el radio mediante el teorema de Pitágoras.

$$g^2 = r^2 + h^2 \rightarrow r^2 = g^2 - h^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81 \rightarrow r = \sqrt{81} = 9 \text{ cm}$$

Sustituyendo los datos en las fórmulas tenemos:

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 9 \cdot 15 = 424,12 \text{ cm}^2$$

$$A_b = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 9^2 = 254,47 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_b = 424,12 + 254,47 = 678,59 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{254,47 \cdot 12}{3} = 1017,88 \text{ cm}^3$$

5. Calcula la cantidad de galleta que contiene un cucurucho de 6 cm de diámetro y 15 cm de altura, y la cantidad de helado que podemos introducir en su interior.

La cantidad de galleta que contiene el cucurucho es el área lateral del cono, y la cantidad de helado que podemos introducir, es su volumen.

Calculamos la generatriz mediante el teorema de Pitágoras.

$$g^2 = r^2 + h^2 = 3^2 + 15^2 = 234 \rightarrow g = \sqrt{234} = 15,3 \text{ cm}$$

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 3 \cdot 15,3 = 144,2 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 15}{3} = 141,37 \text{ cm}^3$$

El cucurucho contiene 144,2 cm² de galleta y podemos introducir 141,37 cm³ de helado.

6. Los diámetros de las bases de un tronco de cono miden 8 cm y 6 cm, y su generatriz, 6 cm. Calcula su área y su volumen.

Calculamos la altura del tronco de pirámide mediante el teorema de Pitágoras.

$$h^2 = 6^2 - (4 - 3)^2 = 36 - 1 = 35 \rightarrow h = \sqrt{35} = 5,92 \text{ cm}$$

Sustituyendo los datos en las fórmulas tenemos:

$$A_L = \pi \cdot (R + r) \cdot g = \pi \cdot (4 + 3) \cdot 6 = 131,95 \text{ cm}^2 \quad A_b = \pi \cdot (R^2 + r^2) = \pi \cdot (4^2 + 3^2) = 76,54 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_b = 131,95 + 76,54 = 208,49 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{\pi \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r) \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot (4^2 + 3^2 + 4 \cdot 3) \cdot 5,92}{3} = 229,38 \text{ cm}^3$$

7. Halla el área y el volumen de la siguiente figura.

El área de la figura es la suma de las áreas laterales del cilindro de 3 cm de radio y 12 cm de altura, y de los dos conos de 3 cm de radio y 4 cm de altura.

Calculamos la generatriz del cono mediante el teorema de Pitágoras.

$$g^2 = r^2 + h^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \rightarrow g = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Sustituyendo los datos en las fórmulas tenemos:

$$A_{L_{\text{Cilindro}}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 12 = 226,19 \text{ cm}^2$$

$$A_{L_{\text{Cono}}} = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 47,12 \text{ cm}^2$$

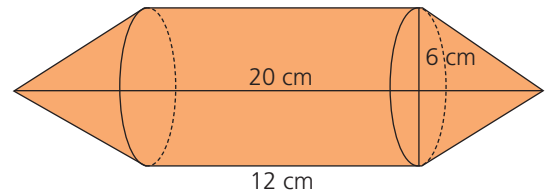
$$A_T = A_{L_{\text{Cilindro}}} + 2 \cdot A_{L_{\text{Cono}}} = 226,19 + 2 \cdot 47,12 = 320,44 \text{ cm}^2$$

El volumen es la suma de los volúmenes de las tres figuras.

$$V_{\text{Cilindro}} = A_b \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 3^2 \cdot 12 = 339,29 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Cono}} = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 4}{3} = 37,7 \text{ cm}^3$$

$$V_T = V_{\text{Cilindro}} + 2 \cdot V_{\text{Cono}} = 339,29 + 2 \cdot 37,7 = 414,69 \text{ cm}^3$$



8. Calcula la distancia entre dos puntos A y B de la superficie esférica, si el radio de la esfera mide 10 cm y el ángulo que forman con el centro de la esfera es de 60° .

Para calcular la distancia entre estos dos puntos utilizamos la longitud de un arco de circunferencia.

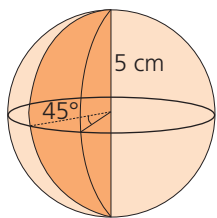
$$L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} = 10,47 \text{ cm}$$

Recuerda

Longitud de un arco de circunferencia:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

9. Halla el área del huso esférico y el volumen de la cuña esférica del dibujo.



El área del huso esférico es proporcional al de la esfera.

$$\text{Entonces: } A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 4 \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot \frac{45}{360} = 39,27 \text{ cm}^2$$

El volumen también es proporcional al de la esfera. Luego:

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 5^3}{3} \cdot \frac{45}{360} = 65,45 \text{ cm}^3$$

Ten en cuenta

El área de un huso esférico y el volumen de una cuña esférica son proporcionales al área y el volumen de la esfera.

10. Determina la distancia entre los puntos $A(30^\circ \text{ E}, 50^\circ \text{ N})$ y $B(30^\circ \text{ E}, 70^\circ \text{ N})$, situados en el mismo meridiano.

La amplitud del arco entre A y B es: $70^\circ - 50^\circ = 20^\circ$

Para hallar la distancia entre A y B , calculamos la longitud del arco correspondiente al sector circular de 20° de amplitud y cuyo radio es aproximadamente el radio de la Tierra (6371 km).

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 2 \cdot \pi \cdot 6371 \cdot \frac{20^\circ}{360^\circ} = 2223,9 \text{ km}$$

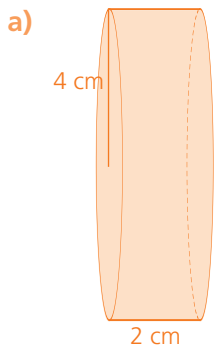
Ten en cuenta

Utiliza la fórmula de la longitud del arco sabiendo que el radio de la Tierra es 6371 km.

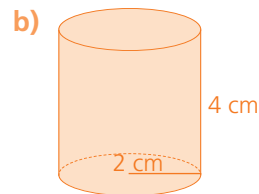
Evaluación C

1. Dado un rectángulo de base 2 cm y altura 4 cm, dibuja el cuerpo que se obtiene al girarlo:

a) Sobre su base.



b) Sobre su altura.



2. Halla el área y el volumen de un cilindro de 8 cm de diámetro y 15 cm de altura.

Al ser el diámetro 8 cm, el radio será 4 cm.

Sustituyendo los datos en las fórmulas tenemos:

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 15 = 376,99 \text{ cm}^2$$

$$A_b = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 4^2 = 50,27 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2A_b = 376,99 + 2 \cdot 50,27 = 477,53 \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h = 50,27 \cdot 15 = 754,05 \text{ cm}^3$$

3. Determina la cantidad de pared que quedará pintada al dar una vuelta completa a un rodillo de 10 cm de diámetro y 30 cm de altura.

La cantidad de pared que se pinta es igual al área lateral del cilindro. Por tanto:

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 30 = 942,48 \text{ cm}^2$$

Quedarán pintados 942,48 cm² de pared.

4. Calcula el área y el volumen de un cono de 8 cm de diámetro y 10 cm de generatriz.

Calculamos la altura del cono mediante el teorema de Pitágoras con el radio y la generatriz.

$$h^2 = g^2 - r^2 = 10^2 - 4^2 = 84 \rightarrow h = \sqrt{84} = 9,17 \text{ cm}$$

Sustituyendo los datos en las fórmulas tenemos:

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 4 \cdot 10 = 125,66 \text{ cm}^2$$

$$A_b = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 4^2 = 50,27 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_b = 125,66 + 50,27 = 175,93 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{50,27 \cdot 9,17}{3} = 153,66 \text{ cm}^3$$

5. Halla la generatriz de un cono de radio 8 m sabiendo que su volumen es de 1 004,8 m³.

Primero calculamos la altura sustituyendo en la fórmula del volumen del cono.

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \rightarrow 1004,8 = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot h}{3} \rightarrow h = \frac{1004,8 \cdot 3}{\pi \cdot 8^2} = 15 \text{ m}$$

Ahora calculamos la generatriz mediante el teorema de Pitágoras con el radio y la altura.

$$g^2 = h^2 + r^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289 \rightarrow g = \sqrt{289} = 17 \text{ m}$$

- 6.** Determina el área total y el volumen de un tronco de cono de 8 m de altura y 10 m de generatriz, sabiendo que la base menor tiene 2 m de radio.

Calculamos la medida del radio de la base mayor.

Si llamamos x a la diferencia entre el radio menor y el radio mayor tenemos:

$$x^2 = g^2 - h^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \rightarrow x = \sqrt{36} = 6 \text{ m}$$

Por lo que el radio de la base mayor es $2 + 6 = 8$ m. Sustituyendo los datos en las fórmulas tenemos:

$$A_L = \pi \cdot (R + r) \cdot g = \pi \cdot (8 + 2) \cdot 10 = 314,16 \text{ m}^2$$

$$A_b = \pi \cdot (R^2 + r^2) = \pi \cdot (8^2 + 2^2) = 213,63 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_L + A_b = 314,16 + 213,63 = 527,79 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{\pi \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r) \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot (8^2 + 2^2 + 8 \cdot 2) \cdot 8}{3} = 703,72 \text{ m}^3$$

- 7.** Halla el área y el volumen de una esfera de 18 cm de diámetro.

Como el diámetro es 18 cm, el radio es 9 cm. Sustituyendo los datos en las fórmulas tenemos:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 9^2 = 1017,88 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 9^3}{3} = 3053,63 \text{ cm}^3$$

- 8.** Se introduce una esfera de 10 m de radio en un recipiente cilíndrico lleno de agua de 12 m de radio y 15 m de altura. ¿Cuántos litros agua quedan en el recipiente al extraer la esfera?

La cantidad de agua que queda en el recipiente es la diferencia de volúmenes entre el cilindro y la esfera.

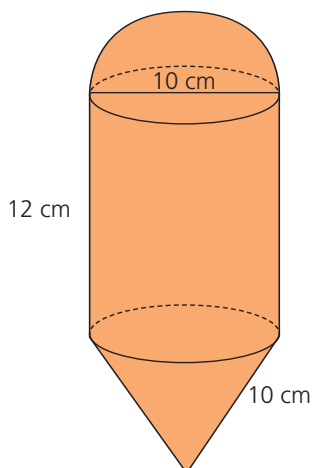
$$V_{\text{Cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 12^2 \cdot 15 = 6785,84 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{Esfera}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^3}{3} = 4188,79 \text{ m}^3$$

$$V = V_{\text{Cilindro}} - V_{\text{Esfera}} = 6785,84 - 4188,79 = 2597,05 \text{ m}^3$$

Quedan $2597,05 \text{ m}^3$ de agua que equivalen a 2597050 L.

- 9.** Halla el área y el volumen de la figura.



Calculamos la altura del cono aplicando el teorema de Pitágoras.

$$h^2 = g^2 - r^2 = 10^2 - 5^2 = 75 \rightarrow h = \sqrt{75} = 8,66 \text{ m}$$

El área de la figura es la suma del área de la semiesfera y las áreas laterales del cilindro y el cono.

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{Semiesfera}} + A_{\text{LCilindro}} + A_{\text{LCono}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^2}{2} + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + \pi \cdot r \cdot g = \\ &= \frac{4 \cdot \pi \cdot 5^2}{2} + 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 12 + \pi \cdot 5 \cdot 10 = 157,08 + 376,99 + 157,08 = 691,15 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

El volumen lo calcularemos sumando los volúmenes de los tres cuerpos.

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{Semiesfera}} + V_{\text{Cilindro}} + V_{\text{Cono}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{6} + \pi \cdot r^2 \cdot h_{\text{Cilindro}} + \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h_{\text{Cono}}}{3} = \\ &= \frac{4 \cdot \pi \cdot 5^3}{6} + \pi \cdot 5^2 \cdot 12 + \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 8,66}{3} = 261,8 + 942,48 + 226,72 = 1431 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

- 10.** Halla la distancia entre dos ciudades cuyas coordenadas geográficas son (20° E, 40° N) y (20° E, 20° S).

Para hallar esta distancia, calculamos la longitud del arco que hay entre estos dos puntos ya que al estar en un mismo meridiano pertenecen al mismo círculo máximo. El ángulo entre ellos es 60° y el radio es el radio de la Tierra (6371 km).

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 2 \cdot \pi \cdot 6371 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} = 6671,7 \text{ km}$$

Evaluación D

1. Halla el área y el volumen de un cilindro de 4 cm de radio cuya diagonal mide 12 cm.

Calculamos la altura del cilindro aplicando el teorema de Pitágoras con la diagonal y el diámetro (8 cm).

$$h^2 = 12^2 - 8^2 = 144 - 64 = 80 \rightarrow h = \sqrt{80} = 8,94 \text{ cm}$$

Sustituyendo los datos en las fórmulas tenemos:

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 8,94 = 224,69 \text{ m}^2$$

$$A_b = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 4^2 = 50,27 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_b = 224,69 + 2 \cdot 50,27 = 325,23 \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h = 50,27 \cdot 8,94 = 449,41 \text{ cm}^3$$

2. Calcula la altura de un cilindro de radio 10 cm si sabemos que su área es 1 161,8 cm².

Sustituyendo los datos en la fórmula del área del cilindro tenemos:

$$A = A_L + 2 \cdot A_b = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2 \rightarrow 1161,8 = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot 10^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1161,8 = 62,8h + 628 \rightarrow 62,8h = 1161,8 - 628 = 533,8 \rightarrow h = \frac{533,8}{62,8} = 8,5 \text{ cm}$$

3. Determina la altura de un cono de 10 cm de diámetro cuya generatriz mide 13 cm.

Hallamos la altura aplicando el teorema de Pitágoras, teniendo en cuenta que el radio mide 5 cm.

$$h^2 = g^2 - r^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \rightarrow h = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

4. Calcula el área y el volumen de un cono de 5 cm de altura y 8 cm de generatriz.

Calculamos el radio mediante el teorema de Pitágoras.

$$r^2 = g^2 - h^2 = 8^2 - 5^2 = 64 - 25 = 39 \rightarrow r = \sqrt{39} = 6,24 \text{ cm}$$

Sustituyendo los datos en las fórmulas tenemos:

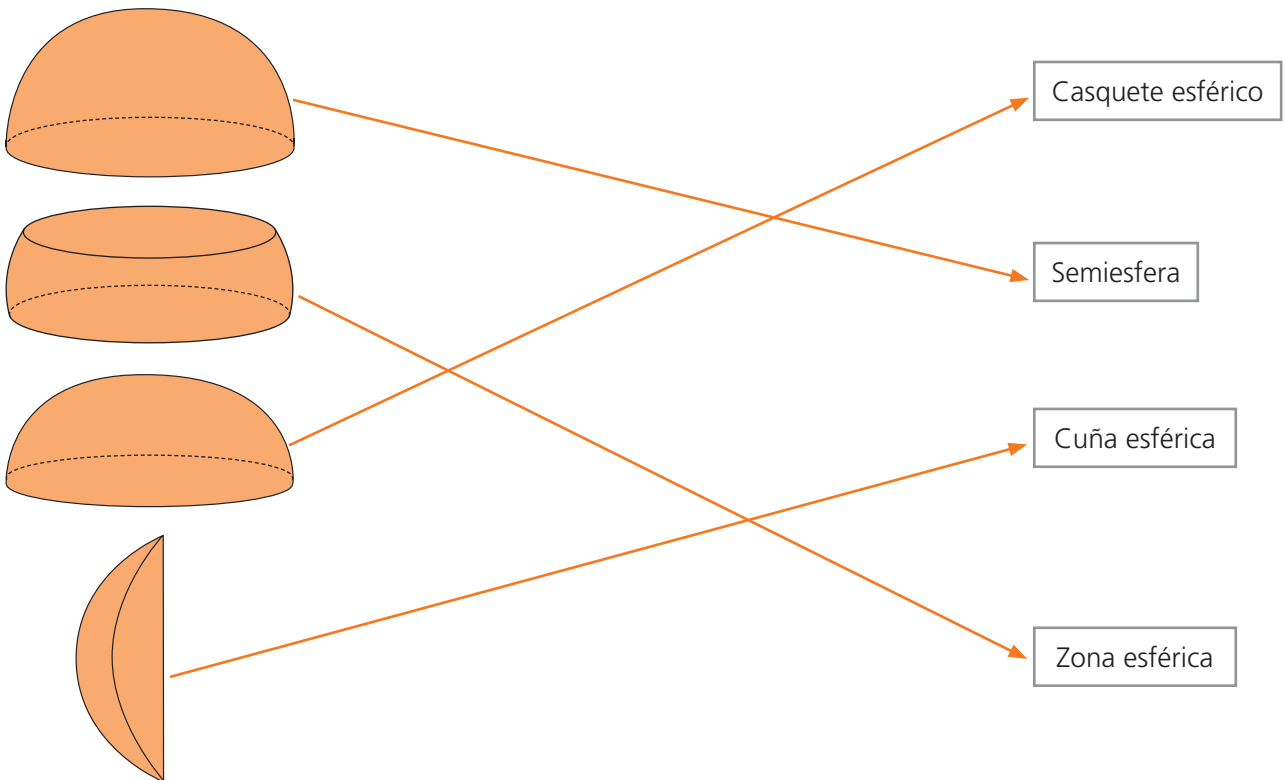
$$A_L = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 6,24 \cdot 8 = 156,83 \text{ cm}^2$$

$$A_b = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 6,24^2 = 122,33 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_b = 156,83 + 122,33 = 279,16 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{122,33 \cdot 8}{3} = 326,21 \text{ cm}^3$$

5. Relaciona cada figura con su nombre correspondiente.



- 6.** Un camión cisterna tiene un depósito de forma cilíndrica de 8 m de longitud y 3 m de diámetro. ¿Qué cantidad de líquido puede transportar?

Calculamos la capacidad del depósito aplicando la fórmula del volumen de un cilindro, sabiendo que el radio es 1,5 m y la altura 8 m.

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 1,5^2 \cdot 8 = 56,55 \text{ m}^3.$$

Por tanto, puede transportar $56,55 \text{ m}^3$ que equivalen a 56 550 L.

- 7.** Calcula el diámetro de un cono de 9 cm de altura cuyo volumen es $1\,139,82 \text{ cm}^3$.

Sustituimos los datos en la fórmula del volumen de un cono.

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \rightarrow 1\,139,82 = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 9}{3} \rightarrow 1\,139,82 = 3 \cdot \pi \cdot r^2 \rightarrow r^2 = \frac{1\,139,82}{3 \cdot \pi} = 121 \rightarrow r = \sqrt{121} = 11 \text{ cm}$$

Por tanto, el diámetro mide 22 cm.

- 8.** El volumen de una esfera es $3\,052,08 \text{ dm}^3$. Halla su diámetro.

En primer lugar, calculamos el radio sustituyendo en la fórmula del volumen de la esfera.

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = 3\,052,08 \rightarrow r^3 = \frac{3\,052,08 \cdot 3}{4 \cdot \pi} = 729 \rightarrow r = \sqrt[3]{729} = 9 \text{ dm}$$

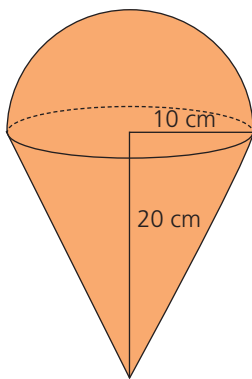
Por tanto, el diámetro mide 18 dm.

- 9.** Halla la distancia entre dos puntos A y B de una esfera de 8 m de radio sabiendo que el ángulo que forman con el centro de la esfera mide 180° .

Para calcular la distancia entre estos dos puntos utilizamos la longitud del arco de una circunferencia.

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \frac{180^\circ}{360^\circ} = 25,13 \text{ m}$$

- 10.** Halla el área y el volumen de la siguiente figura.



La figura está compuesta por un cono de 10 cm de radio y 20 cm de altura, y una semiesfera de 10 cm de radio.

El área de la figura es la suma del área de la semiesfera y el área lateral del cono, ya que la base queda interior.

$$A_{\text{Semiesfera}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^2}{2} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^2}{2} = 628,31 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Cono}} = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 10 \cdot 22,36 = 702,46 \text{ cm}^2$$

$$A = A_{\text{Semiesfera}} + A_{\text{Cono}} = 628,31 + 702,46 = 1\,330,77 \text{ cm}^2$$

El volumen de la figura es la suma de los volúmenes del cono y la semiesfera.

Calculamos la generatriz del cono mediante el teorema de Pitágoras.

$$g^2 = h^2 + r^2 = 20^2 + 10^2 = 400 + 100 = 500 \rightarrow g = \sqrt{500} = 22,36 \text{ cm}$$

$$V = V_{\text{Semiesfera}} + V_{\text{Cono}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{6} + \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^3}{6} + \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 20}{3} = 2\,094,4 + 2\,094,4 = 4\,188,79 \text{ cm}^3$$

FUNCIONES

Evaluación A

1. Escribe la expresión algebraica que corresponde.

- a) La función que asocia a cada número su cuarta parte.
- b) La función que asocia a cada número el cubo de su doble.
- c) La función que asocia a cada número su anterior.
- d) La función que asocia a cada número el cuadrado de su mitad.

a) $f(x) = \frac{x}{4}$

b) $f(x) = (2x)^3$

c) $f(x) = x - 1$

d) $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2$

2. Estudia si las siguientes tablas se corresponden con una función y, en ese caso, escribe la expresión algebraica correspondiente.

a)

x	1	2	3	4	5
y	3	6	9	12	15

b)

x	1	2	3	3	4
y	2	3	4	5	6

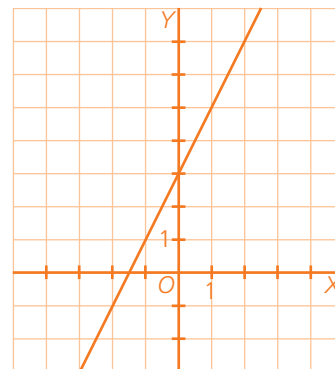
a) Sí es función porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y .

La expresión algebraica es: $y = 3x$

b) No es función porque el valor $x = 3$ tiene dos imágenes (dos valores de y).

3. Completa la tabla de valores de la función $f(x) = 2x + 3$ y represéntala gráficamente.

x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	-3	-1	1	3	5	7



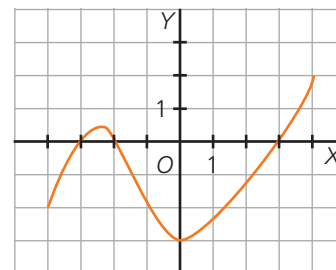
4. Halla el dominio, el recorrido y los puntos de corte de esta función.

Dominio: $[-4, 4]$

Recorrido: $[-3, 2]$

Puntos de corte eje X: $(-3, 0)$, $(-2, 0)$, $(3, 0)$

Puntos de corte eje Y: $(0, -3)$



5. ¿Cuál es el dominio de las siguientes funciones?

a) $f(x) = x^2 + 3x - 6$ b) $g(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}$ c) $h(x) = \sqrt{x - 2}$

a) Dom f : \mathbb{R}

b) Dom g : $\mathbb{R} - \{-1\}$

c) Dom h : $[2, +\infty)$

Ten en cuenta

Imágenes de algunas funciones:

■ Polinomios: \mathbb{R}

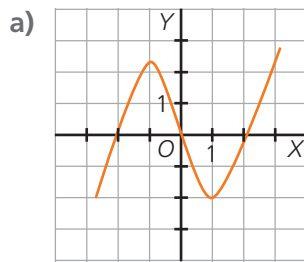
■ Fracciones algebraicas:

$\mathbb{R} - \{\text{valores que hacen 0 el denominador}\}$

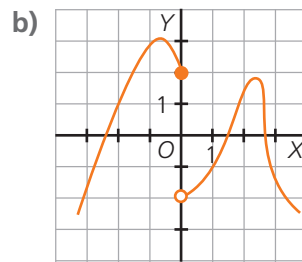
■ Raíces cuadradas:

valores para los cuales el radicando ≥ 0

6. Indica si las funciones representadas son continuas. En el caso de no serlo, indica los puntos de discontinuidad.



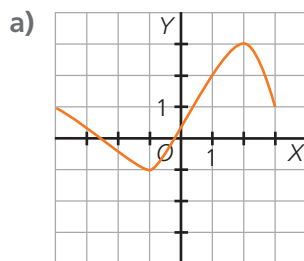
a) Es continua.



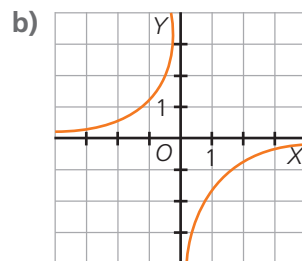
b) Es discontinua. Punto de discontinuidad en $x = 0$.

Ten en cuenta
Los puntos de discontinuidad los indicaremos dando solo el valor de x .

7. Describe la monotonía, los máximos y los mínimos de las siguientes funciones.



a) Decreciente en $(-4, -1)$ y $(2, 3)$ y creciente en $(-1, 2)$. Mínimo $(-1, -1)$ y máximo $(2, 3)$.



b) Creciente en todos los puntos menos en $x = 0$. No tiene mínimos ni máximos.

Ten en cuenta
Indicaremos la monotonía mediante intervalos del eje X , y los máximos y los mínimos, mediante sus coordenadas.

8. Estudia la simetría de estas funciones.

a) $f(x) = x^2 + 3x^4$

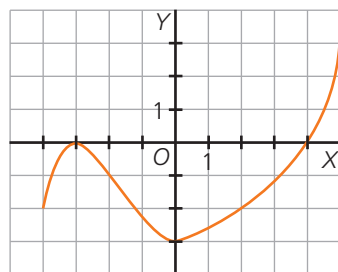
b) $f(x) = 3x^3 - 2x$

a) $f(-x) = (-x)^2 + 3(-x)^4 = x^2 + 3x^4 = f(x) \rightarrow$ Simetría par

b) $f(-x) = 3(-x)^3 - 2(-x) = -3x^3 + 2x = -f(x) \rightarrow$ Simetría impar

Recuerda
■ $f(-x) = f(x) \rightarrow$ Simetría par
■ $f(-x) = -f(x) \rightarrow$ Simetría impar

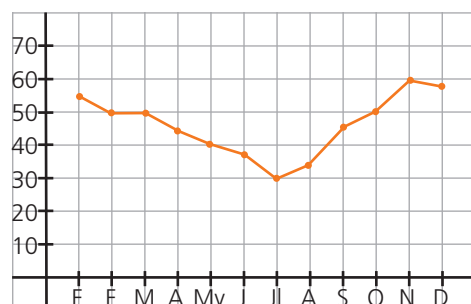
9. Dada la siguiente gráfica, describe todas sus características.



Dominio: $[-4, 5]$; Recorrido: $[-3, 3]$
Puntos de corte: $(-3, 0)$, $(0, -3)$, $(4, 0)$
La función es continua.
Creciente en $(-4, -3)$ y $(0, 5)$.
Decreciente en $(-3, 0)$.
Máximo $(-3, 0)$, Mínimo $(0, -3)$.
No es simétrica ni periódica.

Ten en cuenta
Las características de una función son: dominio, recorrido, puntos de corte, continuidad, monotonía, máximos y mínimos, simetría y periodicidad.

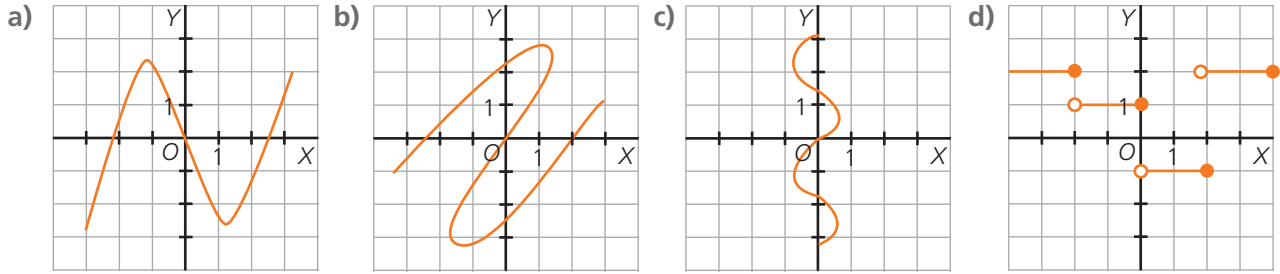
10. Esta gráfica indica la evolución de la factura de electricidad de una familia española. Lee y responde.



- a) ¿En qué mes el gasto fue menor? ¿Cuál fue este gasto?
b) ¿Cuál fue el gasto en octubre? ¿Hubo algún otro mes con el mismo gasto que octubre?
c) ¿En algún momento se mantuvo el gasto durante dos meses consecutivos?
- a) El gasto fue menor en julio. El gasto fue 30 €.
b) El gasto en octubre fue de 50 €. Sí, febrero y marzo.
c) Sí, en febrero y marzo.

Evaluación B

1. Indica si las siguientes gráficas representan una función.



- a) Sí es función. b) No es función. c) No es función. d) Sí es función.

2. Halla la imagen de $x = 3$ para estas funciones.

a) $f(x) = x^2 - 1$

b) $f(x) = 3x^2 - 5x + 3$

a) $f(3) = 3^2 - 1 = 8$

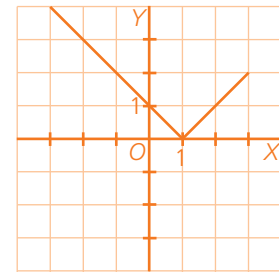
b) $f(3) = 3 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 3 = 27 - 15 + 3 = 15$

Recuerda

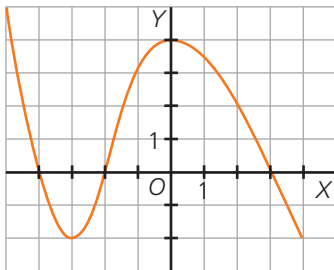
La imagen de un valor a en una función $f(x)$ es el valor numérico $f(a)$.

3. Completa la tabla de valores de la función $f(x) = |x - 1|$ y represéntala gráficamente.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4	3	2	1	0	1	2



4. Halla el dominio, el recorrido y los puntos de corte de esta función.



Dominio: $[-5, 4]$

Recorrido: $[-2, 4]$

Puntos de corte eje X: $(-4, 0), (-2, 0), (3, 0)$

Puntos de corte eje Y: $(0, 4)$

5. Halla los puntos de corte de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2 + 5x + 6$

b) $f(x) = 3x^2 + 2x$

a) Puntos de corte con el eje X:

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -3 \end{cases} \rightarrow (-2, 0), (-3, 0)$$

Puntos de corte eje Y: $f(0) = 0^2 + 5 \cdot 0 + 6 = 6 \rightarrow (0, 6)$

b) Puntos de corte eje X: $3x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(3x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 3x + 2 = 0 \rightarrow x_2 = -\frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow (0, 0), \left(-\frac{2}{3}, 0\right)$

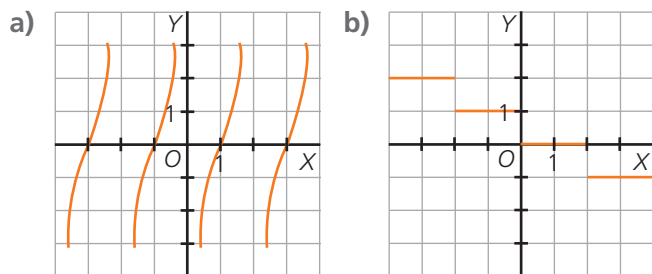
Puntos de corte eje Y: $(0, 0)$, pues han salido ya al calcular los puntos de corte con el eje X.

Recuerda

■ Puntos de corte eje X: $f(x) = 0$

■ Puntos de corte eje Y: $f(0)$

6. Indica si las siguientes funciones son periódicas y, en caso de serlo, indica el período.

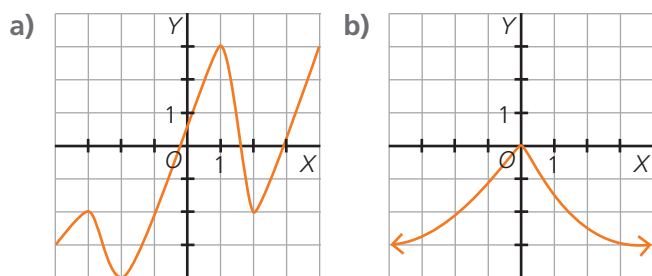


Recuerda

Una función es periódica de período t cuando el comportamiento de la función se repite cada t unidades.

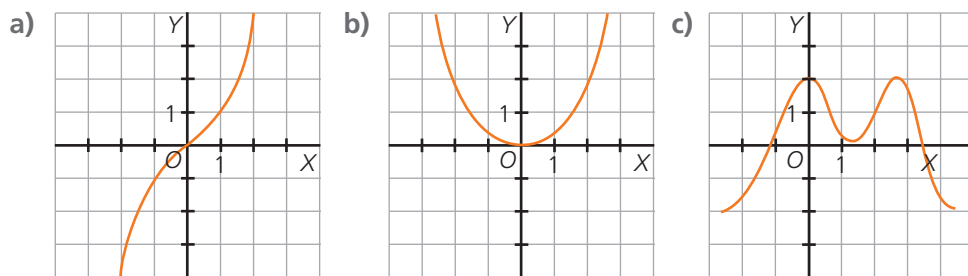
- a) Es periódica de período 2.
 b) No es periódica.

7. Indica la monotonía, los máximos y los mínimos de las siguientes funciones.



- a) Creciente en $(-4, -3)$, $(-2, 1)$ y $(2, 4)$.
 Decreciente en $(-3, -2)$ y $(1, 2)$.
 Máximos en $(-3, -2)$ y $(1, 3)$.
 Mínimos en $(-2, -4)$ y $(2, -2)$.
 b) Creciente en $(-\infty, 0)$.
 Decreciente en $(0, \infty)$.
 Máximo en $(0, 0)$.
 No tiene mínimos.

8. Estudia la simetría de estas funciones.



- a) Simetría impar. b) Simetría par. c) No tiene simetría.

Ten en cuenta

- **Simetría par:** el eje de simetría es el eje Y.
- **Simetría impar:** el eje de simetría es el origen de coordenadas $(0, 0)$.

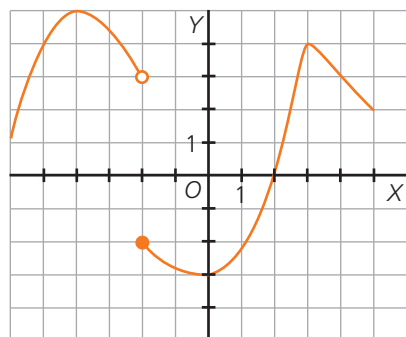
9. Indica el tipo de simetría que tienen estas funciones.

a) $f(x) = \frac{2x}{3x + x^3}$ b) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

a) $f(-x) = \frac{2 \cdot (-x)}{3 \cdot (-x) + (-x)^3} = \frac{2x}{-3x - x^3} = -\frac{2x}{3x + x^3} = -f(x) \rightarrow$ Simetría impar

b) $f(-x) = (-x)^4 - 2 \cdot (-x)^2 + 3 = x^4 - 2x^2 + 3 = f(x) \rightarrow$ Simetría par

10. Describe todas las características de esta gráfica.



- Dominio: $[-6, 5]$; Recorrido: $[-3, 5]$
 Puntos de corte: $(0, -3)$, $(2, 0)$
 La función es discontinua en $x = -2$.
 Creciente en $(-6, -4)$ y $(0, 3)$.
 Decreciente en $(-4, -2)$, $(-2, 0)$ y $(3, 5)$.
 Máximo en $(-4, 5)$ y $(3, 4)$; Mínimo en $(0, -3)$.
 No es simétrica ni periódica.

Evaluación C

1. Expresa las siguientes relaciones mediante una expresión algebraica.

- a) A cada número se le asocia con su triple más dos.
- b) A cada número se le asocia con su cuadrado menos una unidad.
- c) A cada número se le asocia con el cubo de su opuesto.
- d) A cada número se le asocia con el inverso de su doble.

a) $f(x) = 3x + 2$ b) $f(x) = x^2 - 1$ c) $f(x) = (-x)^3$ d) $f(x) = \frac{1}{2x}$

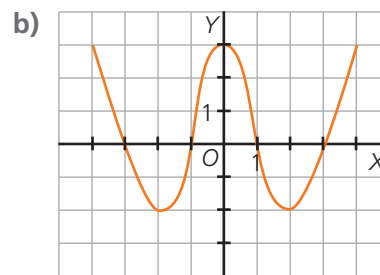
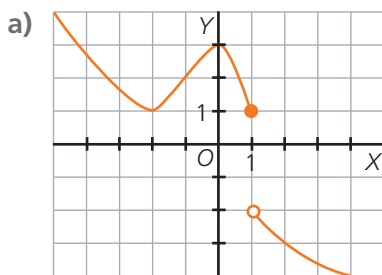
2. Halla el valor de a en cada caso.

- a) La imagen de a mediante la función $f(x) = 3x - 2$ es -5 .
 - b) La imagen de a mediante la función $f(x) = -x^2 - 2$ es -2 .
- a) Sustituyendo en la expresión algebraica: $f(a) = -5 \rightarrow 3a - 2 = -5 \rightarrow 3a = -3 \rightarrow a = -1$
 b) Sustituyendo en la expresión algebraica: $f(a) = -2 \rightarrow -a^2 - 2 = -2 \rightarrow -a^2 = 0 \rightarrow a^2 = 0 \rightarrow a = 0$

3. Indica razonadamente si las siguientes relaciones corresponden con una función.

- a) A cada número se le asigna su anterior y su posterior.
 - b) A cada kilo de carne se le asigna un precio de venta.
 - c) A cada persona se le asigna su número de calzado.
 - d) A cada número natural se le asignan sus dos raíces cuadradas.
- a) No es función, ya que a cada número se le asignan dos valores distintos.
 b) Sí es función, ya que cada kilo de carne tiene un único precio.
 c) Sí es función, ya que cada persona tiene un único número de calzado.
 d) No es función, ya que a cada número natural se le asignan dos valores distintos: uno positivo y otro negativo.

4. Indica el dominio, el recorrido y los puntos de corte de estas funciones.



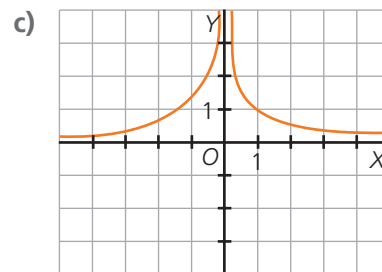
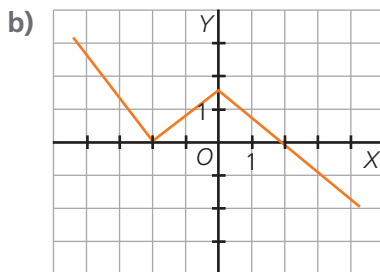
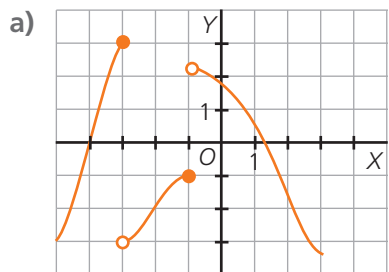
- a) Dominio: $[-5, 4]$; Recorrido: $[-2, 3] \cup [1, 4]$; Puntos de corte eje X: no tiene; Puntos de corte eje Y: $(0, 3)$
- b) Dominio: $[-4, 4]$; Recorrido: $[-2, 3]$; Puntos de corte eje X: $(-3, 0), (-1, 0), (1, 0), (3, 0)$; Puntos de corte eje Y: $(0, 3)$

5. Halla el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{4x^2 - x}{5}$ b) $g(x) = \frac{-1}{x^2 + 1}$ c) $h(x) = \sqrt{-2x + 3}$

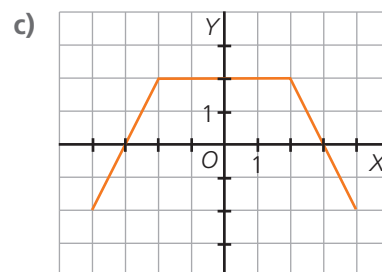
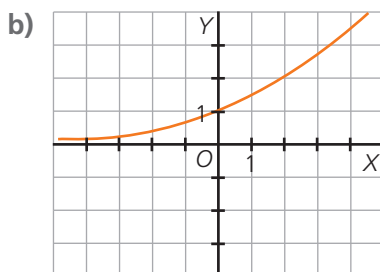
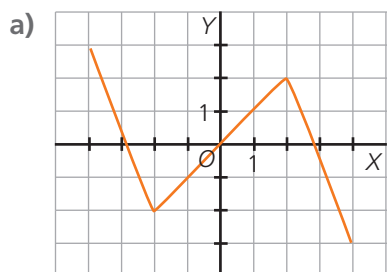
- a) Dom f : \mathbb{R} , ya que el denominador nunca puede ser 0.
- b) Dom g : \mathbb{R} ya que la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución.
- c) Dom h : $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$, pues en este intervalo $-2x + 3 \geq 0$.

6. Indica si las funciones representadas son continuas. Si no lo son, indica los puntos de discontinuidad.



a) Es discontinua en $x = -3$ y $x = -1$. b) Es continua. c) Es discontinua en $x = 0$.

7. Describe la monotonía, los máximos y los mínimos de estas funciones.



a) Creciente en $(-2, 2)$; Decreciente en $(-4, -2)$ y $(2, 4)$; Máximo $(2, 2)$; Mínimo $(-2, -2)$.
 b) Creciente en todos los puntos; No tiene máximos ni mínimos.
 c) Creciente en $(-4, -2)$; Constante en $(-2, 2)$; Decreciente en $(2, 4)$; No tiene máximos ni mínimos.

8. Estudia la simetría de las siguientes funciones dadas en expresión algebraica.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 5}{3x^4}$

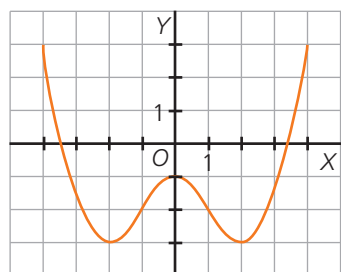
a) $f(-x) = (-x)^2 - 2 \cdot (-x) + 3 = x^2 + 2x + 3$

b) $f(-x) = \frac{(-x)^2 - 5}{3 \cdot (-x)^4} = \frac{x^2 - 5}{3x^4} = f(x)$

No es simétrica.

Simetría par.

9. Dada la siguiente gráfica describe todas sus características.



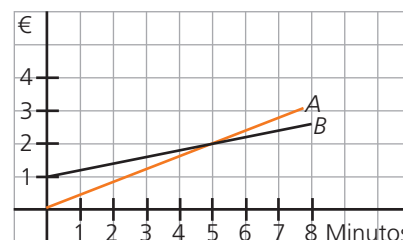
Dominio: $[-4, 4]$; Recorrido: $[-3, 3]$
 Puntos de corte: $(-3, 5)$, $(0, -1)$, $(3, 5)$
 La función es continua.
 Creciente en $(-2, 0)$ y $(2, 4)$.
 Decreciente en $(-4, -2)$ y $(0, 2)$.
 Máximo: $(0, -1)$; Mínimos: $(-2, -3)$ y $(2, -3)$.
 Es simétrica par. No es periódica.

10. En la gráfica se observan las tarifas de dos compañías telefónicas según los minutos de llamada.

- a) ¿Cuál es la tarifa de cada compañía?
 b) Resume qué compañía elegirías para realizar una llamada en función de los minutos que vayas a hablar.

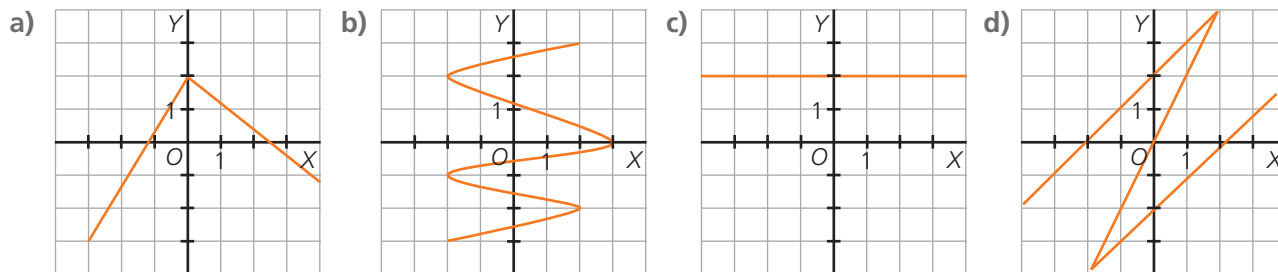
a) La compañía A cobra 0,40 € por minuto de llamada, pero no cobra establecimiento de llamada. La compañía B cobra 1 € por establecimiento de llamada y 0,20 € por minuto.

b) Para llamadas de menos de 5 min es más barata la compañía A; para llamadas de 5 min el precio es el mismo; a partir de 5 min, es más barata la compañía B.



Evaluación D

1. ¿Representan estas gráficas una función?



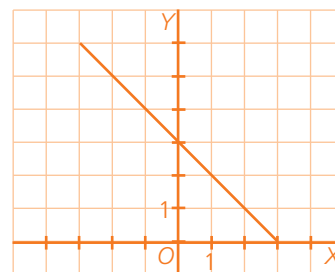
- a) Sí es función. b) No es función. c) Sí es función. d) No es función.

2. Halla la imagen de $x = -2$ para estas funciones.

- a) $f(x) = -2x^2 - 5x + 3$ b) $f(x) = \frac{6}{x-1}$
 a) $f(-2) = -2 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 3 = 5$ b) $f(-2) = \frac{6}{-2-1} = -2$

3. Completa la tabla de valores de la función y represéntala gráficamente.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	6	5	4	3	2	1	0



4. Indica el dominio, el recorrido y los puntos de corte de las siguientes funciones.

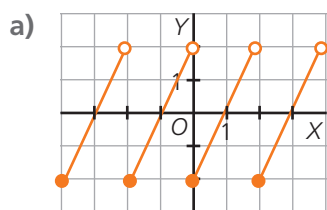


- a) Dominio: $[-5, -1) \cup (1, 5]$; Recorrido: $[-3, 3]$
 Puntos de corte eje X: $(-2, 0)$ y $(2, 0)$; Puntos de corte eje Y: no tiene.
 b) Dominio: $[-4, 4]$; Recorrido: $[-3, 3]$
 Puntos de corte eje X: $(-3, 0)$, $(-1, 0)$, $(3, 0)$; Puntos de corte eje Y: $(0, -2)$

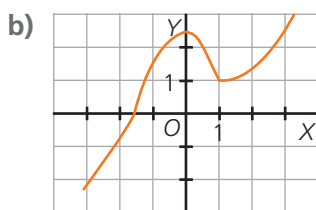
5. Halla los puntos de corte de las siguientes funciones.

- a) $f(x) = -2x$ b) $f(x) = 4x^2 + 9$
 a) Puntos de corte con el eje X: $-2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$. Como también pertenece al eje Y, el punto $(0, 0)$ es el único punto de corte de la función con los ejes.
 b) Puntos de corte con el eje X: $4x^2 + 9 = 0$. Esta ecuación no tiene solución por lo que la función no tiene puntos de corte en el eje X.
 Puntos de corte con el eje Y: $f(0) = 4 \cdot 0^2 + 9 = 9 \rightarrow$ El punto de corte es $(0, 9)$.

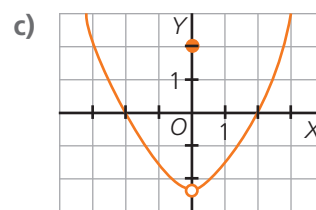
6. Indica si estas funciones son continuas y si son periódicas. Si no son continuas, indica los puntos de discontinuidad.



a) Es discontinua en $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ y $x = 4$. Es periódica de período 2.

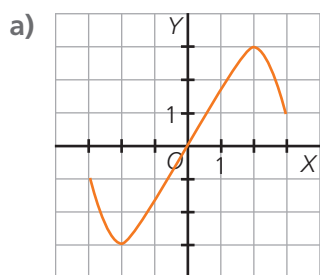


b) Es continua y no periódica.

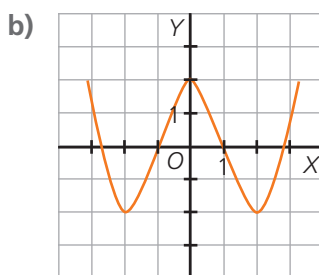


c) Es discontinua en $x = 0$ y no periódica.

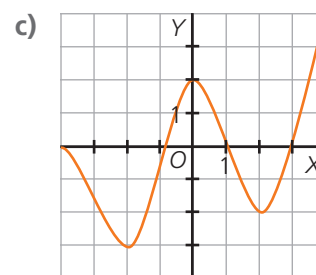
7. Estudia la simetría de estas funciones.



a) Simetría impar.



b) Simetría par.



c) No es simétrica.

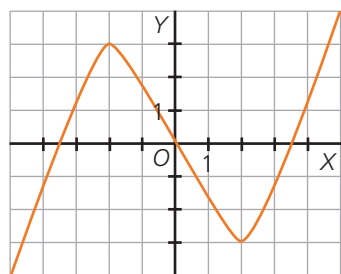
8. Halla el valor de k para que la función $f(x) = 3x^4 + kx^3 + 2x^2 + 6$ tenga simetría par.

Para que la función tenga simetría par se tiene que cumplir que $f(-x) = f(x)$.

$$f(-x) = 3 \cdot (-x)^4 + k \cdot (-x)^3 + 2 \cdot (-x)^2 + 6 = 3x^4 - kx^3 + 2x^2 + 6$$

$$\text{Igualando las dos expresiones: } 3x^4 - kx^3 + 2x^2 + 6 = 3x^4 + kx^3 + 2x^2 + 6 \rightarrow -kx^3 = kx^3 \rightarrow -2kx^3 = 0 \rightarrow k = 0$$

9. Dada la siguiente gráfica, describe todas sus características.



Dominio: $[-5, 5]$; Recorrido: $[-3, 3]$

Puntos de corte: $(-3, 5)$; $(0, 0)$, $(3, 5)$; $(0, 0)$

La función es continua.

Creciente en $(-5, -2)$ y $(2, 5)$.

Decreciente en $(-2, 2)$.

Máximo $(-2, 3)$; Mínimo $(2, -3)$

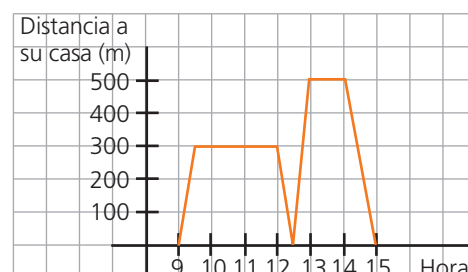
Simétrica impar. No periódica.

10. Álvaro sale de casa a las 9 de la mañana. Va paseando al parque y un rato después vuelve a casa, coge dinero y sale corriendo hacia el cine. Después, vuelve a casa.

a) ¿A qué distancia está el parque de la casa de Álvaro? ¿Cuánto tarda en llegar? ¿Cuánto tiempo estuvo en el parque?

b) ¿A qué distancia está el cine de su casa? ¿A qué hora llegó?

c) ¿Cuánto tardó Álvaro en llegar a su casa después del cine? ¿A qué hora llegó?



a) El parque está a 300 m. Tarda en llegar media hora y allí está 2 horas y media.

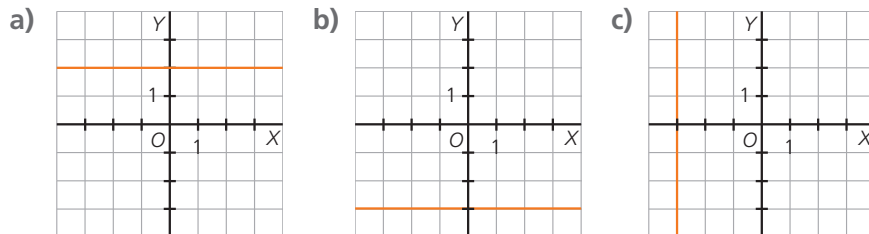
b) El cine está a 500 m. Llegó a las 13:00.

c) Tardó una hora. Llegó a las 15:00.

FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

Evaluación A

1. Escribe la expresión algebraica de estas gráficas. ¿Cuáles no corresponden con una función?



a) $y = 2$ b) $y = -3$ c) No es función.

Recuerda
La función constante tiene como expresión algebraica $y = n$.

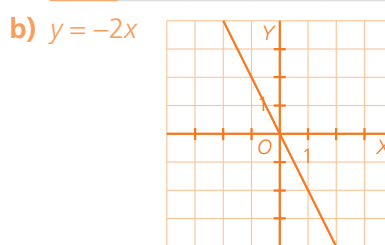
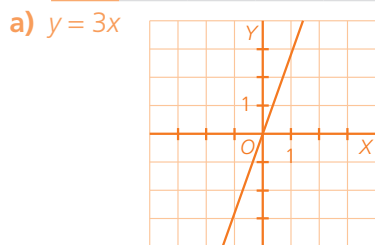
2. Representa gráficamente las funciones de proporcionalidad directa dadas por las siguientes tablas. Indica la expresión algebraica que corresponde en cada caso.

a)

x	0	1	-1	2
y	0	3	-3	6

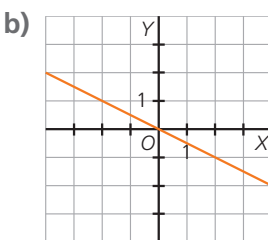
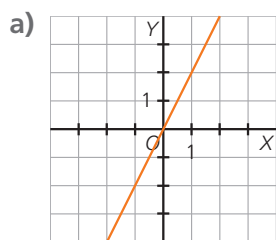
b)

x	-2	-1	0	2
y	4	2	0	-4



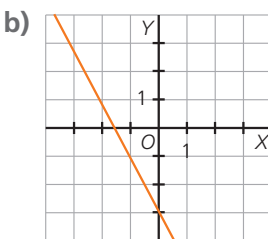
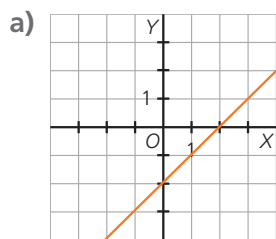
Recuerda
La función de proporcionalidad directa tiene como ecuación $y = mx$ donde m es la pendiente.

3. Halla la ecuación de estas gráficas, indica su pendiente y si son crecientes o decrecientes.



a) $y = 2x$; $m = 2$; Creciente
b) $y = -\frac{1}{2}x$; $m = -\frac{1}{2}$; Decreciente

4. Determina la ecuación de estas gráficas, indica su pendiente y su ordenada en el origen.



a) $y = x - 2$
 $m = 1$; $n = -2$
b) $y = -2x - 3$
 $m = -2$; $n = -3$

Recuerda
Una función lineal tiene como ecuación $y = mx + n$ donde m es la pendiente y n la ordenada en el origen.

5. Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2, 3) si su pendiente es -2.

La recta es de la forma $y = mx + n$. Como $m = -2$, la recta es $y = -2x + n$. Calculamos n sustituyendo el punto (2, 3) en la ecuación anterior: $3 = -2 \cdot 2 + n \rightarrow n = 7$. Luego $y = -2x + 7$.

6. Halla la ecuación punto-pendiente y la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto $A(-1, 4)$ y cuya pendiente es 2.

La ecuación punto-pendiente es: $y - 4 = 2(x + 1)$

Hallamos la ecuación explícita desarrollando la ecuación anterior y despejando.

$$y - 4 = 2(x + 1) \rightarrow y - 4 = 2x + 2 \rightarrow y = 2x + 6$$

7. Dada la recta $\frac{x-2}{3-2} = \frac{y-3}{1-3}$, escribe la ecuación explícita, la punto pendiente y la general.

Ecuación punto-pendiente: $\frac{x-2}{3-2} = \frac{y-3}{1-3} \rightarrow x-2 = \frac{y-3}{-2} \rightarrow y-3 = -2(x-2)$

Ecuación explícita: $y - 3 = -2(x - 2) \rightarrow y - 3 = -2x + 4 \rightarrow y = -2x + 7$

Ecuación implícita: $y = -2x + 7 \rightarrow 2x + y - 7 = 0$

Recuerda

Ecuación punto pendiente:

$$y - a_2 = m(x - a_1)$$

Ecuación explícita:

$$y = mx + n$$

Recuerda

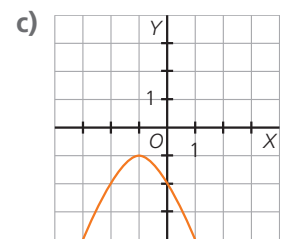
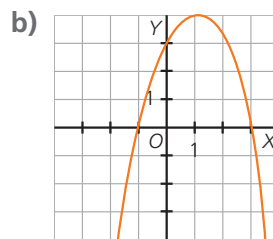
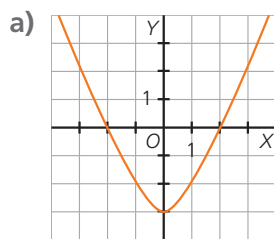
Ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2}$$

Ecuación general o implícita:

$$Ax + By + C = 0$$

8. Observa las gráficas y determina el vértice, el eje de simetría y los puntos de corte con los ejes.



a) Vértice: $(0, -3)$. Eje de simetría: $x = 0$. Puntos de corte con los ejes: $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -3)$

b) Vértice: $(1, 4)$. Eje de simetría: $x = 1$. Puntos de corte con los ejes: $(-1, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$

c) Vértice: $(-1, -1)$. Eje de simetría: $x = -1$. Puntos de corte con los ejes: $(0, -2)$

9. Indica los elementos característicos de la función $f(x) = x^2 - 5x + 4$ y represéntala gráficamente.

Como $a = 1 > 0$, la parábola tiene las ramas abiertas hacia arriba.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Vértice: } -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2} \\ f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 4 = -\frac{9}{4} \end{array} \right\} \rightarrow V\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$

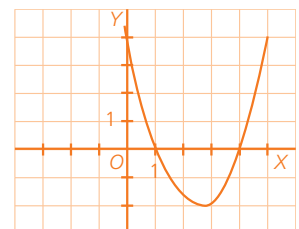
Eje de simetría: $x = \frac{5}{2}$

Puntos de corte con el eje X: $x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases} \rightarrow (1, 0) \text{ y } (4, 0)$

Puntos de corte con el eje Y: $f(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 4 = 4 \rightarrow (0, 4)$

Recuerda

- La abscisa del vértice es $-\frac{b}{2a}$.
- El eje de simetría es $x = -\frac{b}{2a}$.



10. En una tienda hacen un descuento del 20%. Escribe las ecuaciones de las funciones que expresan el descuento y el precio a pagar según el precio del artículo. ¿Qué tipo de funciones son?

Si llamamos x al precio del artículo y $f(x)$ al descuento, la ecuación que expresa el descuento es $f(x) = 0,20x$, y la que expresa el precio a pagar, $f(x) = 0,80x$.

Son funciones de proporcionalidad directa.

Evaluación B

1. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-2, 3)$ y $B(5, 3)$.

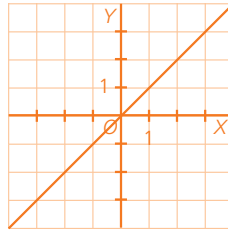
Como la ordenada de los puntos es la misma, 3, la ecuación es constante: $y = 3$

2. Escribe y representa las ecuaciones de las rectas que pasan por:

a) El origen y el punto $(2, 3)$.

a) Al pasar por el origen es una función de proporcionalidad directa de la forma $y = mx$.

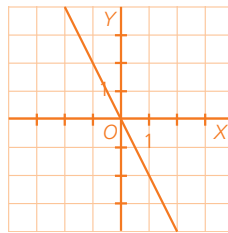
$$m = \frac{3 - 0}{2 - 0} = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2}x$$



b) El origen y el punto $(-1, 3)$.

b) Al pasar por el origen es una función de proporcionalidad directa de la forma $y = mx$.

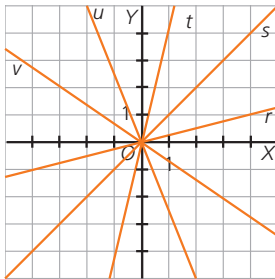
$$m = \frac{3 - 0}{-1 - 0} = \frac{3}{-1} = -3 \rightarrow y = -3x$$



Recuerda

Dados dos puntos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$, la pendiente de la recta que pasa por ellos es $m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$.

3. Determina la expresión algebraica de cada una de estas funciones de proporcionalidad directa.



r: $y = \frac{1}{4}x$

u: $y = -\frac{5}{2}x$

s: $y = x$

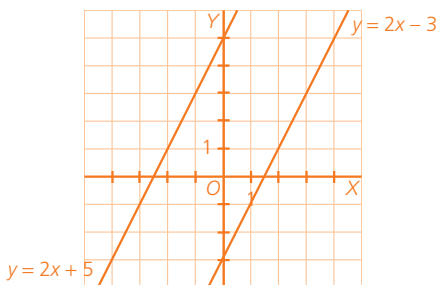
v: $y = -\frac{2}{3}x$

t: $y = 4x$

Ten en cuenta

Para hallar la pendiente, busca dos puntos de la misma recta y divide la variación que hay entre ellos en el eje Y por la variación que hay en el eje X.

4. Representa las funciones lineales $y = 2x - 3$ e $y = 2x + 5$ en un mismo eje de coordenadas. ¿Cómo son las rectas? ¿Cómo son sus pendientes?



Las rectas son paralelas, por lo que las pendientes son iguales.

5. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1, -2)$ y $B(3, -10)$.

La recta es de la forma $y = mx + n$. En primer lugar hallamos la pendiente: $m = \frac{-10 - (-2)}{3 - 1} = \frac{-8}{2} = -4$

Luego la recta es de la forma: $y = -4x + n$

Sustituimos el punto $(1, -2)$ en la ecuación para hallar n : $-2 = -4 \cdot 1 + n \rightarrow n = 2$

Entonces, la ecuación de la recta es $y = -4x + 2$.

6. Halla la recta que pasa por los puntos $A(1, 3)$ y $B(3, -1)$ y escríbela en forma implícita.

La ecuación de la recta que pasa por esos puntos es: $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-3}{-1-3}$

Simplificamos y multiplicamos en cruz para hallar la forma general de la recta.

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-3}{-1-3} \rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4} \rightarrow -4(x-1) = 2(y-3) \rightarrow -4x+4 = 2y-6 \rightarrow -4x-2y+10=0$$

7. Indica la pendiente de estas rectas.

a) $3x + 2y - 5 = 0$ b) $\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+4}{5+4}$ c) $y + 2 = 3(x - 1)$ d) $y = -2x - 5$

a) $3x + 2y - 5 = 0 \rightarrow 2y = -3x + 5 \rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \rightarrow$ La pendiente es $m = \frac{3}{2}$.

b) $\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+4}{5+4} \rightarrow x-2 = \frac{y+4}{9} \rightarrow y+4 = 9(x-2) \rightarrow$ La pendiente es $m = 9$.

c) La ecuación ya está expresada en forma punto-pendiente, luego $m = 3$.

d) La ecuación está dada de forma explícita, por lo que $m = -2$.

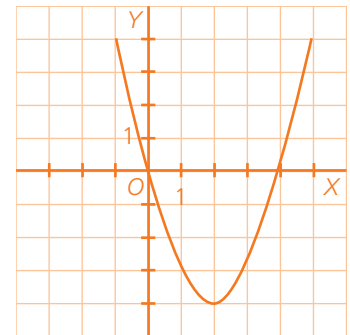
8. Representa la función cuadrática $f(x) = x^2 - 4x$ hallando sus elementos característicos.

Como $a = 1 > 0$, la parábola tiene las ramas abiertas hacia arriba.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Vértice: } -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2 \\ f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4 \end{array} \right\} \rightarrow V(2, -4) \quad \text{Eje de simetría: } x = 2$$

Puntos de corte con el eje X: $x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x - 4) = 0 \rightarrow (0, 0)$ y $(4, 0)$

Puntos de corte con el eje Y: $f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 = 0 \rightarrow (0, 0)$



9. Se lanza una pelota que sigue una trayectoria parabólica dada por $f(x) = -2x^2 + 16x$, donde x son los metros recorridos y $f(x)$ la altura que alcanza en metros. Indica la altura máxima a la que llega la pelota.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Calculamos el vértice: } -\frac{b}{2a} = -\frac{16}{2 \cdot (-2)} = 4 \\ f(4) = -2 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4 = 32 \end{array} \right\} \rightarrow V(4, 32)$$

Luego la altura máxima que alcanza son 32 m.

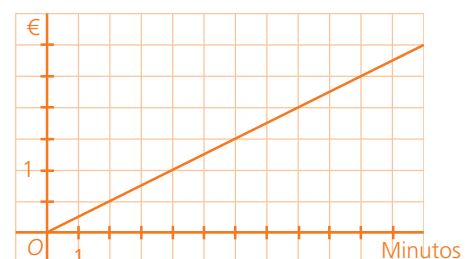
Ten en cuenta

El máximo o el mínimo de una función cuadrática se encuentra en el vértice.

10. Una compañía telefónica cobra 25 CENT por cada minuto de llamada. Completa la tabla y representa gráficamente la función que representa el precio por minuto. ¿Qué tipo de función es?

Minutos	1	2	4	6	10
Precio (€)	0,25	0,50	1	1,50	2,50

Es una función de proporcionalidad directa.



Evaluación C

1. Halla la ecuación de una función constante que pase por el punto $A(3, -1)$. Escribe la ecuación de una recta paralela a la anterior que pase por el punto $B(2, 5)$.

Para hallar la ecuación de la función constante, nos fijamos en segunda coordenada del punto. Entonces, $y = -1$.

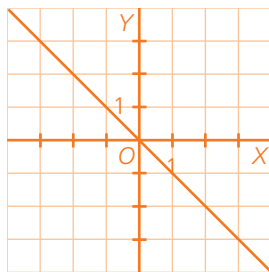
La recta paralela que pasa por el punto $(2, 5)$ es $y = 5$.

2. Representa gráficamente las funciones dadas por las siguientes tablas. Indica la expresión algebraica que corresponde en cada caso.

a)

x	1	2	3	4
y	-1	-2	-3	-4

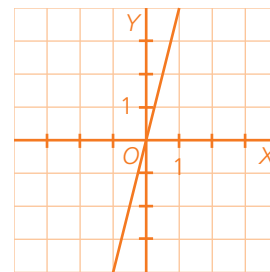
a) $y = -x$



b)

x	-1	0	1	2
y	-4	0	4	8

b) $y = 4x$



3. Determina la pendiente de las funciones de proporcionalidad directa que pasan por:

a) El punto $(2, 5)$.

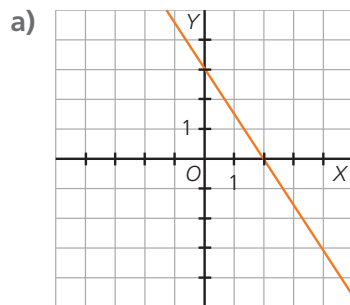
b) El punto $(-1, 3)$.

En ambos casos al ser funciones de proporcionalidad directa pasan por el $(0, 0)$.

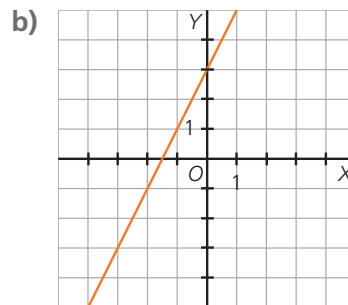
a) $m = \frac{5 - 0}{2 - 0} = \frac{5}{2}$

b) $m = \frac{3 - 0}{-1 - 0} = -3$

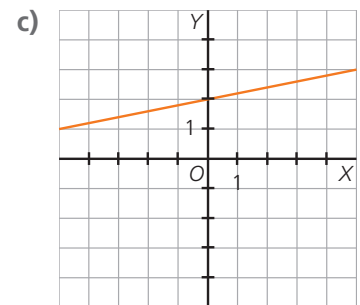
4. Escribe la expresión algebraica de las siguientes funciones lineales. ¿Cuál es la pendiente? ¿Y la ordenada en el origen?



a) $y = -\frac{3}{2}x + 3; m = -\frac{3}{2}; n = 3$



b) $y = 2x + 3; m = 2; n = 3$



c) $y = \frac{1}{5}x + 2; m = \frac{1}{5}; n = 2$

5. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1, -5)$ cuya pendiente es 3.

La recta es de la forma $y = mx + n$. Como $m = 3$, la recta es $y = 3x + n$.

Calculamos n sustituyendo el punto $(1, -5)$ en la ecuación anterior: $-5 = 3 \cdot 1 + n \rightarrow n = -8$

Luego la ecuación de la recta es: $y = 3x - 8$

6. Escribe la recta que pasa por los puntos $A(2, -1)$ y $B(3, -4)$, y escríbela en forma implícita.

La ecuación de la recta que pasa por esos puntos es: $\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+1}{-4+1}$

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+1}{-4+1} \rightarrow x-2 = \frac{y+1}{-3} \rightarrow -3(x-2) = y+1 \rightarrow -3x+6 = y+1 \rightarrow -3x-y+5 = 0$$

7. Halla la ecuación de una recta paralela a $y = 3x - 2$ que pase por el punto $A(2, 5)$.

Una recta paralela a ella tiene la misma pendiente; luego buscamos una recta de ecuación $y = 3x + n$.

Sustituimos el punto $(2, 5)$ en la ecuación para hallar n : $5 = 3 \cdot 2 + n \rightarrow 5 = 6 + n \rightarrow n = -1$

Entonces, la ecuación es: $y = 3x - 1$

8. Representa la función cuadrática $f(x) = -x^2 - 4x - 3$ hallando sus elementos característicos.

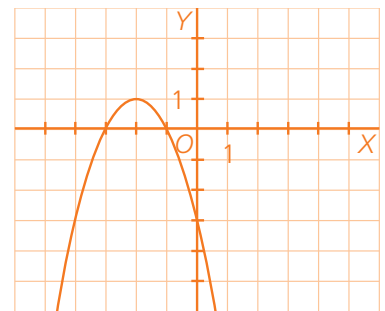
Como $a = -1 < 0$, la parábola tiene las ramas abiertas hacia abajo.

$$\left. \begin{aligned} \text{Vértice: } -\frac{b}{2a} &= -\frac{-4}{2 \cdot (-1)} = -2 \\ f(-2) &= -(-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 3 = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow V(-2, 1)$$

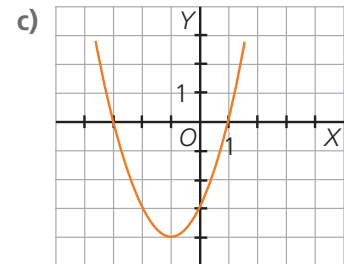
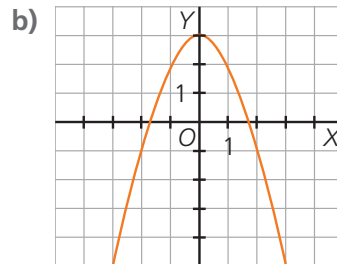
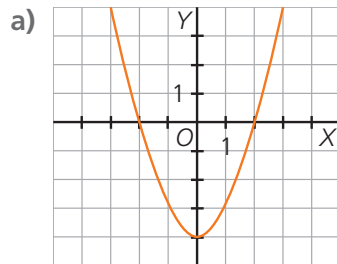
Eje de simetría: $x = -2$

Puntos de corte con el eje X: $-x^2 - 4x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = -3 \rightarrow (-1, 0)$ y $(-3, 0)$

Puntos de corte con el eje Y: $f(0) = -0^2 - 4 \cdot 0 - 3 = -3 \rightarrow (0, -3)$



9. Relaciona cada una de las siguientes gráficas con su ecuación correspondiente.



$f(x) = x^2 + 2x - 3$

$f(x) = x^2 - 4$

$f(x) = -x^2 + 3$

10. Dos gimnasios ofertan los siguientes precios:

GIMNASIO A: 40 € matrícula + 40 €/mes

GIMNASIO B: No se paga matrícula. 50 €/mes

- a) Indica la expresión que relaciona el número de meses y el precio en cada uno de los gimnasios.
 b) Realiza una tabla de valores para cada gimnasio con el precio para 6 meses y representa en unos mismos ejes de coordenadas las dos gráficas. ¿Qué opción sería más económica según el número de meses?

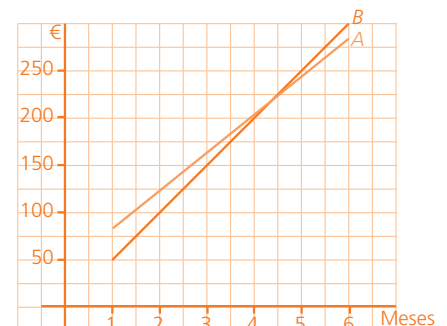
a) GIMNASIO A: $y = 40x + 40$

GIMNASIO B: $y = 50x$

b)

N.º meses	1	2	3	4	5	6
Precio A	80	120	160	200	240	280
Precio B	50	100	150	200	250	300

Para menos de 4 meses es más económico el gimnasio B; para 4 meses tendrían el mismo precio, y para más de 4 meses, sería más económico el gimnasio A.



Evaluación D

1. Escribe las ecuaciones de los ejes de coordenadas. ¿Cuál de ellos podría representar una función y cuál no?

Eje X: $y = 0$ Eje Y: $x = 0$

El eje X podría representar una función constante.

2. Clasifica estas funciones según sean constantes, de proporcionalidad directa o lineales.

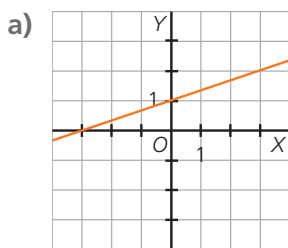
a) $y = 0,25x$ b) $y = -3x + 2$ c) $y = 5$ d) $y = 2x$ e) $y = -1$ f) $y = 4x - 1$

Constantes: $y = 5, y = -1$

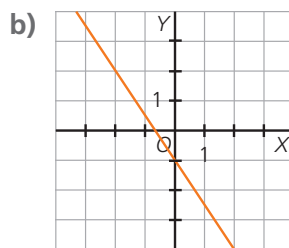
Lineales: $y = -3x + 2, y = 4x - 1$

Proporcionalidad directa: $y = 0,25x, y = 2x$

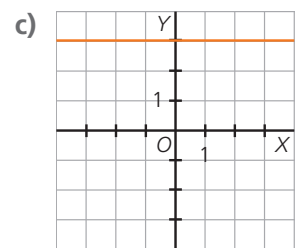
3. Halla la ecuación de las siguientes gráficas, indica su pendiente y si son crecientes o decrecientes.



a) $y = \frac{1}{3}x + 1$
 $m = \frac{1}{3}$; Creciente



b) $y = -\frac{3}{2}x - 1$
 $m = -\frac{3}{2}$; Decreciente



c) $y = 3$
 $m = 0$; Constante

4. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-2, 3)$ y $B(1, 6)$. Escribe la ecuación de la recta paralela a ella que corta al eje Y en el punto $C(0, -2)$.

La recta que pasa por los puntos $(-2, 3)$ y $(1, 6)$ es de la forma $y = mx + n$.

La pendiente es $m = \frac{6 - 3}{1 - (-2)} = \frac{3}{3} = 1$, por lo que la recta es de la forma $y = x + n$.

Sustituimos el punto $(-2, 3)$ en la ecuación para hallar n : $3 = -2 + n \rightarrow n = 5$

Entonces la ecuación es: $y = x + 5$

Una recta paralela a esta tiene pendiente 1 y, si corta al eje Y en el punto $(0, -2)$, la ordenada en el origen es -2 . Luego la ecuación de la recta paralela es: $y = x - 2$

5. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) Una función constante tiene pendiente 0.
 - b) Una función cuadrática puede no cortar a ninguno de los ejes de coordenadas.
 - c) En la ecuación de la recta $y = mx + n$, m indica la pendiente y n la ordenada en el origen.
 - d) La recta dada de la forma $Ax + By + C = 0$ se llama ecuación explícita.
- a) VERDADERO. Las funciones constantes ni crecen ni decrecen por lo que tienen pendiente 0.
 - b) FALSO. Puede no cortar al eje X pero siempre corta al eje Y.
 - c) VERDADERO. El coeficiente de x indica la pendiente, y el término independiente, la ordenada en el origen.
 - d) FALSO. Esa forma de la recta se llama ecuación implícita.

- 6.** Halla las ecuaciones punto-pendiente y explícita de la recta que pasan por $A(1, 5)$ y $B(-2, 3)$.

La pendiente es $m = \frac{3 - 5}{-2 - 1} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$. Entonces, la ecuación punto-pendiente es: $y - 5 = \frac{2}{3}(x - 1)$

La ecuación explícita es: $y - 5 = \frac{2}{3}(x - 1) \rightarrow y - 5 = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$

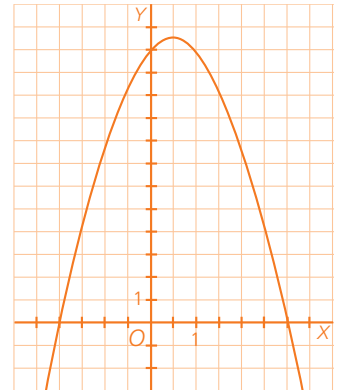
- 7.** Representa la función cuadrática $f(x) = -2x^2 + 2x + 12$ hallando sus elementos característicos.

Como $a = -2 < 0$, la parábola tiene las ramas abiertas hacia abajo.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Vértice: } -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot (-2)} = \frac{1}{2} \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 12 = \frac{25}{2} \end{array} \right\} \rightarrow V\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{2}\right) \quad \text{Eje de simetría: } x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Puntos de corte con el eje X: } -2x^2 + 2x + 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases} \rightarrow (3, 0) \text{ y } (-2, 0)$$

$$\text{Puntos de corte con el eje Y: } f(0) = -2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 12 = 12 \rightarrow (0, 12)$$



- 8.** Halla los puntos de corte de las funciones $f(x) = x^2 + x - 1$ y $g(x) = -x^2 + 9$.

Iguamos las expresiones y resolvemos: $x^2 + x - 1 = -x^2 + 9 \rightarrow 2x^2 + x - 10 = 0 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -\frac{5}{2}$

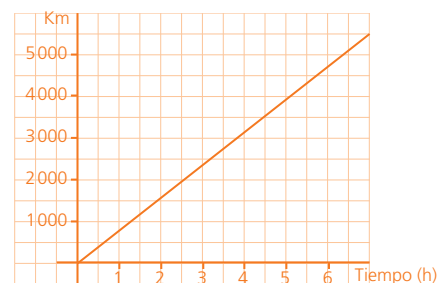
Sustituimos los valores en una de las expresiones: $f(2) = 2^2 + 2 - 1 = 5$; $f\left(-\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right) - 1 = \frac{11}{4}$

Por tanto, los puntos de corte son $(2, 5)$ y $\left(-\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right)$.

- 9.** Un avión se desplaza a 800 km/h. Escribe y representa la ecuación de la función que relaciona el espacio recorrido y el tiempo empleado. ¿Qué tipo de función es?

Si llamamos x al tiempo empleado e y al espacio recorrido, la ecuación es $y = 800x$.

Es una función de proporcionalidad directa.



- 10.** Se lanza una pelota desde la ventana de un edificio siguiendo una trayectoria dada por la ecuación $f(x) = -x^2 + 3x + 10$, donde x representa el espacio recorrido e y la altura que alcanza en metros. ¿A qué altura se encuentra la ventana? ¿A qué distancia del edificio cae la pelota? ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

La ventana se encuentra a $f(0) = -0^2 + 3 \cdot 0 + 10 = 10$ m de altura.

Hallamos el punto de corte con el eje X: $-x^2 + 3x + 10 = 0 \rightarrow x_1 = 5, x_2 = -2 \rightarrow$ La pelota cae a 5 m.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Vértice: } -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = \frac{3}{2} \\ f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{2} + 10 = \frac{49}{4} = 12,25 \end{array} \right\} \rightarrow V\left(\frac{3}{2}, 12,25\right) \rightarrow \text{Alcanza } 12,25 \text{ m de altura.}$$

ESTADÍSTICA

Evaluación A

1. Clasifica estas variables estadísticas en cualitativas o cuantitativas y, en este último caso, indica si la variable es discreta o continua.

- a) La edad en años de una persona.
- b) Los ingresos mensuales de una familia.
- c) El color de ojos de una persona.
- d) El número de nacimientos en un mes en una ciudad.

- a) Cuantitativa discreta c) Cualitativa
- b) Cuantitativa continua d) Cuantitativa discreta

Recuerda

- **Variable cualitativa:** los datos son cualidades.
- **Variable cuantitativa:** los datos son números.
 - Discreta: solo puede tomar valores aislados.
 - Continua: puede tomar cualquier valor intermedio entre dos números dados.

2. En una clase de 30 alumnos se han obtenido los siguientes resultados en un examen de matemáticas. ¿Qué tipo de variable es? Realiza el recuento y construye una tabla.

8 5 3 6 6 5 2 8 7 5 8 2 4 5 7
4 5 9 4 6 7 6 3 5 6 2 8 9 7 5

Es una variable cuantitativa discreta.

Nota	2	3	4	5	6	7	8	9
Recuento	3	2	3	7	5	4	4	2

3. Completa esta tabla de frecuencias a partir de los datos de la actividad anterior.

Nota (x_i)	f_i	h_i	F_i	H_i	%
2	3	0,1	3	0,1	10
3	2	0,07	5	0,17	7
4	3	0,1	8	0,27	10
5	7	0,23	15	0,5	23
6	5	0,17	20	0,67	17
7	4	0,13	24	0,8	13
8	4	0,13	28	0,93	13
9	2	0,07	30	1	7
Total	30	1			100

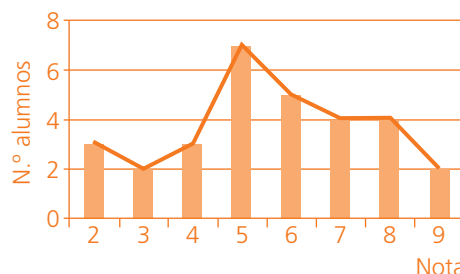
Recuerda

- Frecuencia absoluta (f_i): número de veces que se repite cada dato.
- Frecuencia absoluta acumulada (F_i):

$$F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i$$
- Frecuencia relativa (h_i): $\frac{f_i}{N.º \text{ de datos}}$
- Frecuencia relativa acumulada (H_i):

$$H_i = h_1 + h_2 + \dots + h_i$$
- Porcentaje (%): $h_i \cdot 100$

4. Representa los datos de la actividad 2 en un diagrama de barras y mediante un polígono de frecuencias.



5. Halla la media, la moda y la mediana de los datos anteriores.

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + x_4 \cdot f_4 + x_5 \cdot f_5 + x_6 \cdot f_6 + x_7 \cdot f_7 + x_8 \cdot f_8}{N}$$

$$= \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 9 \cdot 2}{30} = \frac{167}{30} = 5,57$$

Mo = 5 porque es el dato con mayor frecuencia absoluta.

Para calcular la mediana se halla la media aritmética de los dos datos centrales, que corresponden con las posiciones 15 y 16.

$$Me = \frac{7 + 4}{2} = 5,5$$

Recuerda

- **Media:**

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_n \cdot f_n}{N}$$
- **Moda (Mo):** es el dato que tiene mayor frecuencia absoluta.
- **Mediana (Me):** es el valor que ocupa la posición central.

6. Calcula los cuartiles correspondientes a los datos de la actividad 2.

Nos fijamos en los datos de la tabla de la actividad 3.

El primer cuartil deja el 25 % de los datos a la izquierda por lo que, según la columna H_i , corresponde con la nota 4. Luego $Q_1 = 4$.

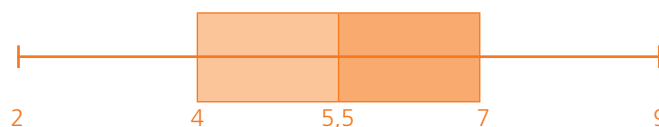
El segundo cuartil coincide con la mediana por lo que $Q_2 = 5,5$.

El tercer cuartil deja el 75 % de los datos a la izquierda por lo que, según la columna H_i , corresponde con la nota 7. Luego $Q_3 = 7$.

Recuerda

- Q_1 es el valor que deja a su izquierda el 25 % de los datos.
- Q_2 es el valor que deja a su izquierda el 50 % de los datos.
- Q_3 es el valor que deja a su izquierda el 75 % de los datos.

7. Representa los datos de la actividad anterior en un diagrama de caja y bigotes.



8. Calcula el rango, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación de los datos anteriores.

Partimos de la tabla de la actividad 3.

$$R = 9 - 2 = 7$$

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 \cdot f_1 + x_2^2 \cdot f_2 + x_3^2 \cdot f_3 + x_4^2 \cdot f_4 + x_5^2 \cdot f_5 + x_6^2 \cdot f_6 + x_7^2 \cdot f_7 + x_8^2 \cdot f_8}{N}$$

$$- \bar{x}^2 = \frac{2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 2 + 4^2 \cdot 3 + 5^2 \cdot 7 + 6^2 \cdot 5 + 7^2 \cdot 4 + 8^2 \cdot 4 + 9^2 \cdot 2}{30} -$$

$$- 5,57^2 = 3,88$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{3,88} = 1,97$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1,97}{5,57} = 0,35$$

Recuerda

- **Rango:**

$$R = \text{dato mayor} - \text{dato menor}$$
- **Varianza:**

$$\sigma^2 = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_n \cdot f_n}{N} - \bar{x}^2$$
- **Desviación típica:** $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
- **Coefficiente de variación:** $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$

9. La media de las cuatro notas de un alumno es 7,2. Calcula la cuarta nota si tres de ellas son 8,5; 6,9 y 6,6.

Llamamos x al valor de la cuarta nota y sustituimos en la fórmula de la media.

$$\frac{8,5 + 6,9 + 6,6 + x}{4} = 7,2 \rightarrow \frac{22 + x}{4} = 7,2 \rightarrow 22 + x = 28,8 \rightarrow x = 28,8 - 22 = 6,8$$

La cuarta nota del alumno es 6,8.

Evaluación B

1. Clasifica estas variables estadísticas en cualitativas o cuantitativas y, en este último caso, indica si la variable es discreta o continua.

- a) Número de calzado de una persona. a) Cuantitativa discreta
- b) Color de pelo de una persona. b) Cualitativa
- c) Número de aprobados en una asignatura. c) Cuantitativa discreta

2. Estas son las alturas en centímetros de 25 jóvenes. ¿Qué tipo de variable es? Construye una tabla donde aparezcan los datos en intervalos de 5 cm, las marcas de clase y el recuento.

172 175 168 182 194 178 169 183 187 191 173 177 181
184 166 181 184 173 175 178 189 187 179 185 178

Altura	Marca de clase	Recuento
[165, 170)	167,5	3
[170, 175)	172,5	3
[175, 180)	177,5	7
[180, 185)	182,5	6
[185, 190)	187,5	4
[190, 195)	192,5	2

Recuerda

La marca de clase es el punto medio de cada intervalo.

Es una variable cuantitativa continua.

3. Completa esta tabla de frecuencias a partir de los datos de la actividad anterior.

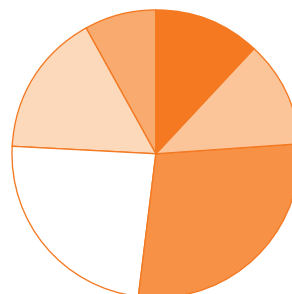
Altura	Marca de clase x_i	f_i	h_i	F_i	H_i	%
[165, 170)	167,5	3	0,12	3	0,12	12
[170, 175)	172,5	3	0,12	6	0,24	12
[175, 180)	177,5	7	0,28	13	0,52	28
[180, 185)	182,5	6	0,24	19	0,76	24
[185, 190)	187,5	4	0,16	23	0,92	16
[190, 195)	192,5	2	0,08	25	1	8
Total		25	1			100

4. Dibuja el diagrama de sectores correspondiente a los datos de la actividad 2.

Altura	Marca de clase x_i	h_i	Amplitud
[165, 170)	167,5	0,12	43,2°
[170, 175)	172,5	0,12	43,2°
[175, 180)	177,5	0,28	100,8°
[180, 185)	182,5	0,24	86,4°
[185, 190)	187,5	0,16	57,6°
[190, 195)	192,5	0,08	28,8°
Suma		1	360°

Recuerda

En un diagrama de sectores:
Ángulo del sector circular = $h_i \cdot 360^\circ$



- [165, 170)
- [170, 175)
- [175, 180)
- [180, 185)
- [185, 190)
- [190, 195)

5. Halla la media, la moda y la mediana de los datos anteriores.

Partimos de la tabla de la actividad 3 y utilizamos la marca de clase para calcular la media.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + x_4 \cdot f_4 + x_5 \cdot f_5 + x_6 \cdot f_6}{N} = \\ &= \frac{167,5 \cdot 3 + 172,5 \cdot 3 + 177,5 \cdot 7 + 182,5 \cdot 6 + 187,5 \cdot 4 + 192,5 \cdot 2}{25} = \\ &= \frac{4492,5}{25} = 179,7 \text{ cm}\end{aligned}$$

El intervalo modal es [175, 180). La moda es $Mo = 177,5$.

El intervalo mediano es [175, 180) ya que su frecuencia relativa acumulada es la primera que supera 0,5. La mediana es 177,5.

Ten en cuenta

En datos agrupados, la media se calcula con las marcas de clase.

La moda y la mediana se tomarán como la marca de clase del intervalo que las contenga.

6. Calcula los cuartiles correspondientes a los datos de la actividad 2.

Nos fijamos en los datos de la tabla de la actividad 3.

El primer cuartil deja el 25% de los datos a la izquierda por lo que, según la columna H_r , corresponde con el intervalo [175, 180).

Luego $Q_1 = 177,5$.

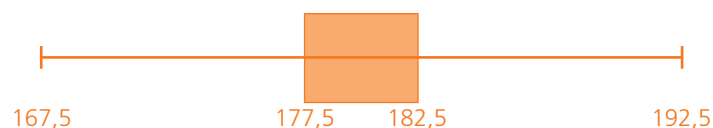
El segundo cuartil coincide con la mediana por lo que $Q_2 = 177,5$.

El tercer cuartil deja el 75% de los datos a la izquierda por lo que, según la columna H_r , corresponde con el intervalo [180, 185). Luego $Q_3 = 182,5$.

Ten en cuenta

En datos agrupados, tomamos las marcas de clase como aproximación de los cuartiles.

7. Representa los datos de la actividad anterior en un diagrama de caja y bigotes.



8. Calcula el rango, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación de los datos anteriores.

Partimos de la tabla de la actividad 3.

$$R = 195 - 165 = 30$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{x_1^2 \cdot f_1 + x_2^2 \cdot f_2 + x_3^2 \cdot f_3 + x_4^2 \cdot f_4 + x_5^2 \cdot f_5 + x_6^2 \cdot f_6}{N} - \bar{x}^2 = \\ &= \frac{167,5^2 \cdot 3 + 172,5^2 \cdot 3 + 177,5^2 \cdot 7 + 182,5^2 \cdot 6 + 187,5^2 \cdot 4 + 192,5^2 \cdot 2}{25} - 179,7^2 = \\ &= \frac{808\,556,25}{25} - 32\,292,09 = 50,16\end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{50,16} = 7,08 \quad CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{7,08}{179,7} = 0,04$$

9. Responde razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) La frecuencia relativa de una serie de datos es el número de veces que se repite un dato concreto.
- b) Para representar datos agrupados se suele utilizar un histograma.
- c) La suma de todas las frecuencias relativas es igual al número total de datos.
- d) La desviación típica siempre es menor que la varianza.

- a) FALSO. El número de veces que se repite un dato concreto es la frecuencia absoluta.
- b) VERDADERO. El histograma siempre se usa para datos agrupados.
- c) FALSO. La suma de las frecuencias relativas es igual a 1, independientemente del número de datos.
- d) FALSO. Si la varianza es menor que 1, la desviación típica es mayor que la varianza.

Evaluación C

1. Clasifica estas variables estadísticas en cualitativas o cuantitativas y, en este último caso, indica si la variable es discreta o continua.

- a) Consumo de agua de una familia. a) Cuantitativa continua
- b) Comida favorita de las personas de un edificio. b) Cualitativa
- c) Número de llamadas de teléfono realizadas en un año. c) Cuantitativa discreta

2. Al preguntar a 40 alumnos sobre el número de horas diarias de estudio, hemos conseguido los siguientes resultados. ¿Qué tipo de variable es? Realiza el recuento y exprésalo mediante una tabla.

3 2 3 1 4 2 3 4 5 1
 2 0 3 4 3 0 5 1 2 3
 3 4 3 4 2 3 4 2 0 2
 2 3 4 4 5 0 1 1 3 2

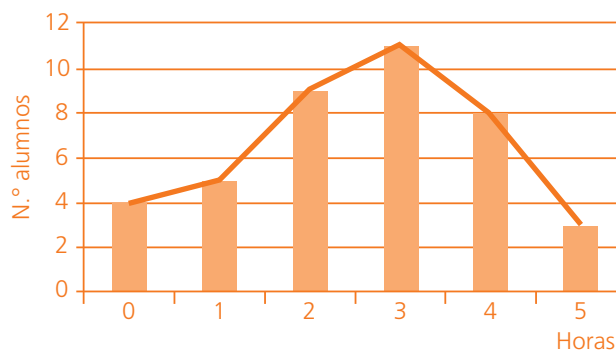
Es una variable cuantitativa discreta.

N.º horas	0	1	2	3	4	5
Recuento	4	5	9	11	8	3

3. Completa esta tabla de frecuencias a partir de los datos de la actividad anterior.

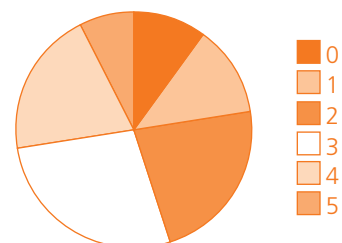
Horas (x_i)	f_i	h_i	F_i	H_i	%
0	4	0,1	4	0,1	10
1	5	0,125	9	0,225	12,5
2	9	0,225	18	0,45	22,5
3	11	0,275	29	0,725	27,5
4	8	0,2	37	0,925	20
5	3	0,075	40	1	7,5
Total	40	1			100

4. Representa los datos de la actividad 2 en un diagrama de barras y mediante un polígono de frecuencias.



5. Dibuja el diagrama de sectores correspondiente a los datos de la actividad 2.

Horas (x_i)	h_i	Amplitud
0	0,1	36°
1	0,125	45°
2	0,225	81°
3	0,275	99°
4	0,2	72°
5	0,075	27°



6. Halla la media, la mediana y la moda de los datos anteriores.

Partimos de la tabla de la actividad 3.

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + x_4 \cdot f_4 + x_5 \cdot f_5 + x_6 \cdot f_6}{N} = \frac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 3}{40} = \frac{103}{40} = 2,575$$

$$Mo = 3$$

Para calcular la mediana se calcula la media aritmética de los dos datos centrales, que corresponden a las posiciones 20 y 21. Como los dos datos en esas posiciones son iguales a 3, entonces $Me = 3$.

7. Calcula los cuartiles correspondientes a los datos de la actividad 2.

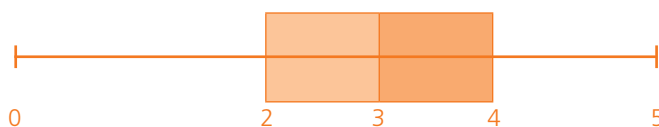
Nos fijamos en los datos de la tabla de la actividad 3.

El primer cuartil deja el 25 % de los datos a la izquierda por lo que, según la columna H_i , corresponde con 2 horas. Luego $Q_1 = 2$.

El segundo cuartil coincide con la mediana por lo que $Q_2 = 3$.

El tercer cuartil deja el 75 % de los datos a la izquierda por lo que, según la columna H_i , corresponde con 4 horas. Luego $Q_3 = 4$.

8. Representa los datos de la actividad anterior en un diagrama de caja y bigotes.



9. Calcula el rango, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación de los datos anteriores.

Partimos de la tabla de la actividad 3.

$$R = 5 - 0 = 5$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{x_1^2 \cdot f_1 + x_2^2 \cdot f_2 + x_3^2 \cdot f_3 + x_4^2 \cdot f_4 + x_5^2 \cdot f_5 + x_6^2 \cdot f_6}{N} - \bar{x}^2 = \\ &= \frac{0^2 \cdot 4 + 1^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 9 + 3^2 \cdot 11 + 4^2 \cdot 8 + 5^2 \cdot 3}{40} - 2,575^2 = \frac{343}{40} - 6,63 = 1,945 \end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1,944} = 1,39 \quad CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1,39}{2,575} = 0,54$$

10. Completa la siguiente tabla de frecuencias.

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i	%
4	3	0,06	3	0,06	6
6	5	0,1	8	0,16	10
7	8	0,16	16	0,32	16
9	12	0,24	28	0,56	24
10	15	0,3	43	0,86	30
12	7	0,14	50	1	14
Total	50	1			100

Evaluación D

1. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) El coeficiente de variación se utiliza para medir la dispersión de los datos.
- b) El diagrama de caja y bigotes representa la media, la mediana y la moda.
- c) La mediana siempre coincide con el tercer cuartil.
- a) VERDADERO. Cuanto mayor sea el coeficiente de variación, mayor será la dispersión de los datos.
- b) FALSO. Representa los cuartiles y la mediana.
- c) FALSO. La mediana coincide con el segundo cuartil.

2. Estos son los goles que ha marcado un equipo de fútbol en las últimas 20 temporadas. ¿Qué tipo de variable es? Realiza el recuento mediante intervalos de amplitud 8 empezando en [58, 66) y exprésalo mediante una tabla.

75 85 63 77 58 81 69 86 72 71
70 66 84 83 102 102 121 103 104 118

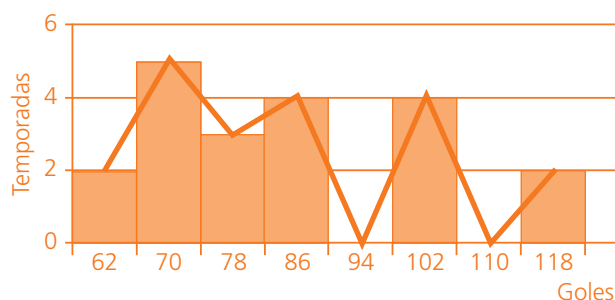
Es una variable cuantitativa discreta.

Goles	Marca de clase	Recuento
[58, 66)	62	2
[66, 74)	70	5
[74, 82)	78	3
[82, 90)	86	4
[90, 98)	94	0
[98, 106)	102	4
[106, 114)	110	0
[114, 122)	118	2

3. Completa esta tabla de frecuencias a partir de los datos de la actividad anterior.

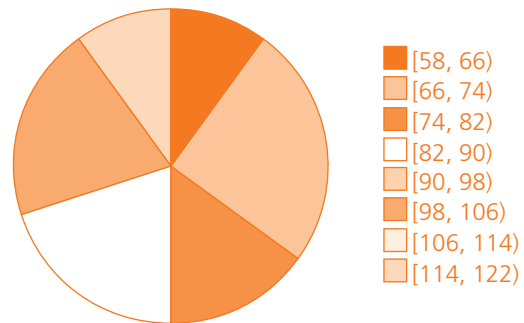
Goles	Marca de clase (x_i)	f_i	h_i	F_i	H_i	%
[58, 66)	62	2	0,1	2	0,1	10
[66, 74)	70	5	0,25	7	0,35	25
[74, 82)	78	3	0,15	10	0,5	15
[82, 90)	86	4	0,2	14	0,7	20
[90, 98)	94	0	0	14	0,7	0
[98, 106)	102	4	0,2	18	0,9	20
[106, 114)	110	0	0	18	0,9	0
[114, 122)	118	2	0,1	20	1	10
Total		20	1			100

4. Representa los datos anteriores en un histograma y construye el polígono de frecuencias.



5. Dibuja el diagrama de sectores correspondiente a los datos de la actividad 2.

Goles	Marca de clase (x_i)	h_i	Amplitud
[58, 66)	62	0,1	36°
[66, 74)	70	0,25	90°
[74, 82)	78	0,15	54°
[82, 90)	86	0,2	72°
[90, 98)	94	0	0°
[98, 106)	102	0,2	72°
[106, 114)	110	0	0°
[114, 122)	118	0,1	36°
Suma		1	360°



6. Halla la media, mediana y moda de los datos anteriores.

Partimos de la tabla de la actividad 3.

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + x_4 \cdot f_4 + x_5 \cdot f_5 + x_6 \cdot f_6 + x_7 \cdot f_7 + x_8 \cdot f_8}{N} =$$

$$= \frac{62 \cdot 2 + 70 \cdot 5 + 78 \cdot 3 + 86 \cdot 4 + 94 \cdot 0 + 102 \cdot 4 + 110 \cdot 0 + 118 \cdot 2}{20} = \frac{1696}{20} = 84,8 \text{ goles}$$

El intervalo modal es [66, 74). La moda es $Mo = 70$.

El intervalo mediano es [74, 82) ya que su frecuencia relativa acumulada es la primera que supera 0,5. La mediana es 78.

7. Calcula los cuartiles correspondientes a los datos de la actividad 2.

Nos fijamos en los datos de la tabla de la actividad 3.

El primer cuartil deja el 25 % de los datos a la izquierda por lo que, según la columna H_i , corresponde con el intervalo [66, 74). Luego $Q_1 = 70$.

El segundo cuartil coincide con la mediana por lo que $Q_2 = 78$.

El tercer cuartil deja el 75 % de los datos a la izquierda por lo que, según la columna H_i , corresponde con el intervalo [98, 106). Luego $Q_3 = 102$.

8. Calcula el rango, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación de los datos anteriores.

Partimos de la tabla de la actividad 3. $R = 195 - 165 = 30$

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 \cdot f_1 + x_2^2 \cdot f_2 + x_3^2 \cdot f_3 + x_4^2 \cdot f_4 + x_5^2 \cdot f_5 + x_6^2 \cdot f_6 + x_7^2 \cdot f_7 + x_8^2 \cdot f_8}{N} - \bar{x}^2 =$$

$$= \frac{62^2 \cdot 2 + 70^2 \cdot 5 + 78^2 \cdot 3 + 86^2 \cdot 4 + 94^2 \cdot 0 + 102^2 \cdot 4 + 110^2 \cdot 0 + 118^2 \cdot 2}{20} - 84,8^2 =$$

$$= \frac{149488}{20} - 7191,04 = 283,36$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{283,36} = 16,83 \quad CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{16,83}{84,8} = 0,198$$

9. En el examen de matemáticas, la nota media de los 24 alumnos de 3.º A de ESO ha sido 6,2, y la de los 32 alumnos de 3.º B, 7,6. ¿Cuál es la media total de todos los alumnos de 3.º A y 3.º B?

Para calcular la media tenemos en cuenta el número de alumnos de cada grupo.

$$\text{Por tanto: } \bar{x} = \frac{6,2 \cdot 24 + 7,6 \cdot 32}{24 + 32} = \frac{399,6}{56} = 7,01$$

La media total de todos los alumnos es 7,01.

PROBABILIDAD

Evaluación A

1. Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios.

- a) Extraer una carta de una baraja española.
- b) Determinar el color de una bola extraída de una urna en la que todas las bolas son azules.
- c) Indicar el número de personas que irán al cine dentro de una semana.

a) Aleatorio b) No aleatorio c) Aleatorio

2. Sea A el suceso sacar un 4 o un 5 al lanzar dos dados numerados del 1 al 6.

- a) ¿Es un experimento aleatorio?
- b) Describe el espacio muestral.
- c) ¿Qué elementos forman el suceso A ? ¿Y el suceso \bar{A} ?
- d) ¿Cómo son los sucesos sacar un número mayor que 7 y sacar un número menor que 7?

a) Sí, es un experimento aleatorio.

b) $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

c) $A = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5)\}$
 $\bar{A} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 6)\}$

d) Sacar mayor que 7 es un suceso imposible y sacar un número menor que 7 es un suceso seguro.

3. Lanzamos tres monedas equilibradas. Consideramos los siguientes sucesos.

$A = \text{salir dos caras}$

$B = \text{salir al menos una cara}$

a) Describe el espacio muestral.

b) Describe los sucesos \bar{A} , \bar{B} , $\bar{A} \cap B$ y $\bar{A} \cup B$.

a) $E = \{CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX\}$

b) $\bar{A} = \{CCC, CXX, XCX, XXC, XXX\}$

$\bar{B} = \{XXX\}$

$\bar{A} \cap B = \{CCC, CXX, XCX, XXC\}$

$A \cup \bar{B} = \{CCX, CXC, XCC, XXX\}$

4. Extraemos al azar una carta de una baraja española de 40 cartas. Halla:

- a) La probabilidad de que sea un oro.
- b) La probabilidad de que no sea una espada.
- c) La probabilidad de que sea una figura.
- d) La probabilidad de que sea un as o una copa.

a) $P(\text{oro}) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

c) $P(\text{figura}) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

b) $P(\text{no espada}) = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$

d) $P(\text{as o copa}) = \frac{13}{40}$

Recuerda

Un experimento es aleatorio si no podemos predecir su resultado.

Recuerda

■ El espacio muestral, \mathcal{E} , es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

■ \bar{A} es el suceso contrario de A .

Recuerda

■ El suceso $\bar{A} \cup B$ contiene a todos los elementos que pertenecen a A o B .

■ El suceso $\bar{A} \cap B$ contiene a todos los elementos que pertenecen a A y B a la vez.

Recuerda

Regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{n.º de casos favorables a que ocurra } A}{\text{n.º de casos posibles del experimento}}$$

5. La familia Navarro va a tener trillizos, aunque no sabe cuál va a ser el sexo de los bebés. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres bebés sean del mismo sexo? ¿Y de que sean dos niñas?

Llamamos H si el sexo es hombre y M si es mujer.

$$E = \{HHH, HHM, HMH, MHH, HMM, MHM, MMH, MMM\}$$

$$P(\text{mismo sexo}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \qquad P(\text{dos niñas}) = \frac{3}{8}$$

6. Un dado truco tiene las siguientes probabilidades: $P(1) = x$, $P(2) = 2x$, $P(3) = 3x$, $P(4) = 4x$, $P(5) = 5x$ y $P(6) = 6x$. Calcula la probabilidad de cada uno de los resultados. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar el dado salga un número par?

La suma de todas las probabilidades tiene que ser igual a 1.

$$\text{Entonces: } x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 1 \rightarrow 21x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{21}$$

$$\text{Luego: } P(1) = \frac{1}{21}, P(2) = \frac{2}{21}, P(3) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}, P(4) = \frac{4}{21}, P(5) = \frac{5}{21} \text{ y } P(6) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

$$\text{La probabilidad de que al lanzar el dado salga un número par es: } P(2) + P(4) + P(6) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{2}{7} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

Ten en cuenta

La suma de las probabilidades de todos los sucesos que forman el espacio muestral es igual a 1.

7. Con las cifras 3, 5, 6 y 7 se han formado todos los posibles números de cuatro cifras distintas. Si entre ellos elegimos uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea múltiplo de 5? ¿Y múltiplo de 3? ¿Y par?

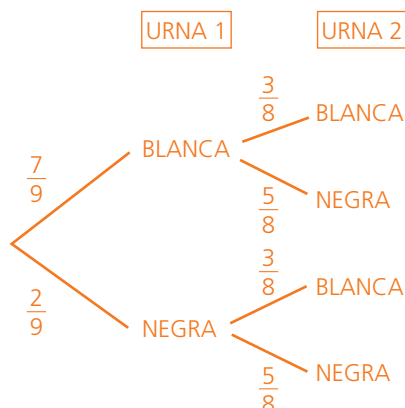
$$E = \{3567, 3576, 3657, 3675, 3756, 3765, 5367, 5376, 5637, 5673, 5736, 5763, 6357, 6375, 6537, 6573, 6735, 6753, 7356, 7365, 7536, 7563, 7635, 7653\}$$

$$\text{Para que sea múltiplo de 5, el número tiene que acabar en 5. Entonces: } P(\text{múltiplo de 5}) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

Para que sea múltiplo de 3, la suma de sus cifras tiene que ser múltiplo de 3. Como la suma es 21 cualquiera que sea el orden de las cifras, entonces: $P(\text{múltiplo de 3}) = 1$

$$\text{El número es par si termina en 6, por lo que: } P(\text{par}) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

8. Una urna contiene 7 bolas blancas y 2 negras, y otra, 3 bolas blancas y 5 negras. Se extrae una bola al azar de cada urna. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean negras? ¿Y las dos de distinto color?



Recuerda

En un diagrama de árbol:

- La suma de las probabilidades de los sucesos cuyas ramas tienen el mismo origen es 1.
- La probabilidad de un suceso es igual al producto de las probabilidades de las ramas que lo forman.

$$P(n-n) = \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{10}{72} = \frac{5}{36}$$

$$P(\text{distinto color}) = P(b-n) + P(n-b) = \frac{7}{9} \cdot \frac{5}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{35}{72} + \frac{6}{72} = \frac{41}{72}$$

9. Lanzamos dos dados y se multiplican los resultados. Describe el espacio muestral y halla la probabilidad de que el resultado sea 18, 34 y 12.

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$$

Aunque el espacio muestral tiene 18 elementos, hay 36 casos posibles.

$$P(18) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \qquad P(34) = 0 \qquad P(12) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Ten en cuenta

Fíjate en que, por ejemplo, el número 6 puede ser el resultado de $6 \cdot 1$, $1 \cdot 6$, $2 \cdot 3$ y $3 \cdot 2$.

Evaluación B

1. Lanzamos al aire un dado con las caras numeradas del 1 al 6.

- a) ¿Es un experimento aleatorio?
- b) Describe el espacio muestral.
- c) Describe un suceso seguro.
- d) Describe un suceso imposible.

- a) Sí, es aleatorio ya que no sabemos el resultado que se va a producir.
- b) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- c) Un suceso seguro es el que siempre se produce; por ejemplo, *sacar menos de 7*.
- d) Un suceso imposible es el que no se puede producir; por ejemplo, *sacar un 7*.

2. Extraemos una bola de una urna que contiene 15 bolas numeradas del 1 al 15 y se anota su número. Consideramos estos sucesos.

$A = \text{salir número par}$ $B = \text{salir un número primo}$ $C = \text{salir un número mayor que 10}$

Describe los sucesos \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup \bar{C}$, $A \cap C$, $\bar{B} \cup C$ y $\overline{B \cap C}$.

$$\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$$

$$A \cup \bar{C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14\}$$

$$\bar{B} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$$

$$A \cap C = \{12, 14\}$$

$$\bar{C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\bar{B} \cup C = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14\}$$

$$\overline{B \cap C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$$

$$A \cap B = \{2\}$$

3. Considera el experimento aleatorio que consiste en lanzar dos monedas equilibradas.

- a) Describe el espacio muestral.
- b) Halla la probabilidad de que salgan dos caras.
- c) Halla la probabilidad de que no salga una cruz.
- d) Halla la probabilidad de que salga un resultado distinto en cada moneda.

a) $E = \{CC, CX, XC, XX\}$ b) $P(2 \text{ caras}) = \frac{1}{4}$ c) $P(\text{no una cruz}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ d) $P(\text{distintas}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

4. Cogemos al azar una carta de una baraja española. Considera los siguientes sucesos.

$A = \text{salir oros}$

$B = \text{salir un rey}$

$C = \text{salir número par}$

Halla las probabilidades de $A \cup B$, $A \cup C$ y $B \cup C$.

Los sucesos A , B y C son compatibles.

$$P(A) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}, P(C) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P(\text{rey de oros}) = \frac{1}{40}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$$

$$P(A \cap C) = P(\text{par y oros}) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

$$P(B \cap C) = P(\text{rey y par}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$$

5. Se ha lanzado cinco veces una moneda equilibrada y en todas ellas ha salido cara. Si se lanza otra vez la moneda, ¿cuál es la probabilidad de que salga cara?

La probabilidad es $\frac{1}{2}$. No tenemos que contar los resultados anteriores ya que cada lanzamiento es independiente y la moneda es equilibrada.

Recuerda

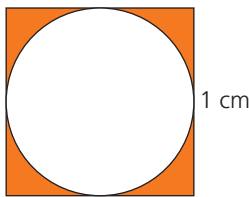
■ Si los sucesos A y B son compatibles:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

■ Si los sucesos A y B son incompatibles:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

6. Si lanzamos un dardo en esta figura, ¿cuál es la probabilidad de que caiga en la zona naranja? ¿Y en la zona blanca?



$$P(\text{naranja}) = \frac{A(\text{zona naranja})}{A(\text{total})} = \frac{1 - \pi \cdot r^2}{1^2} =$$

$$= \frac{1 - \pi \cdot 0,5^2}{1} = 0,21$$

$$P(\text{blanca}) = 1 - P(\text{naranja}) = 1 - 0,21 = 0,79$$

Ten en cuenta
Puedes utilizar el área para calcular probabilidades.

7. En cierto experimento se sabe que $P(A \cup B) = 1$. Si $P(A) = 0,7$ y $P(B) = 0,6$, ¿son A y B sucesos incompatibles? Si los sucesos son incompatibles se cumple que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. En este caso $P(A \cup B) \neq P(A) + P(B)$ ya que $1 \neq 0,6 + 0,7$ por lo que los sucesos son compatibles.
8. Considera el experimento aleatorio que consiste en lanzar una moneda y un dado a la vez.
- Describe el espacio muestral
 - Halla la probabilidad de que salga cara y par.
 - Halla la probabilidad de que salga cruz e impar.
 - Halla la probabilidad de que salga cruz o impar.
 - Halla la probabilidad de que no salga cara.

a) $E = \{C1, C2, C3, C4, C5, C6, X1, X2, X3, X4, X5, X6\}$

b) $P(\text{cara y par}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

c) $P(\text{cruz e impar}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

d) $P(\text{cruz o impar}) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

e) $P(\text{no cara}) = P(\text{cruz}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

9. Lanzamos tres monedas y cuatro dados a la vez. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?

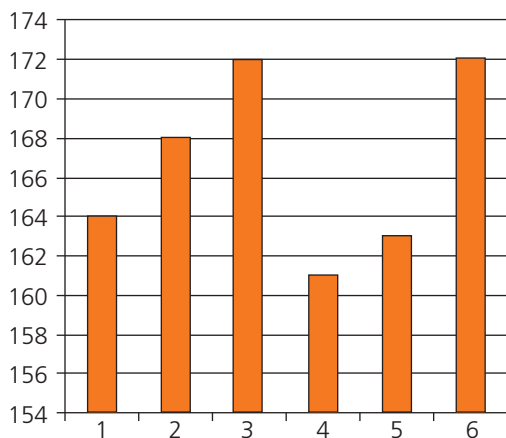
Lanzar una moneda tiene 2 resultados posibles: C y X

Lanzar un dado tiene 6 resultados posibles: 1, 2, 3, 4, 5 y 6

Lanzar tres monedas y cuatro dados tiene estos elementos: $2^3 \cdot 6^4 = 10368$

Ten en cuenta
El número de elementos del espacio muestral de un experimento compuesto es el producto del número de elementos de cada uno de los espacios muestrales de los experimentos simples que lo componen.

10. En este diagrama de barras se han representado las frecuencias absolutas obtenidas al lanzar un dado 1000 veces. Calcula la frecuencia relativa de cada caso e indica si podemos deducir que el dado está trucado.



Recuerda
Ley de los grandes números
Si se realiza un experimento un número elevado de veces, las frecuencias relativas de un suceso se aproximan al valor de su probabilidad.

Dato	1	2	3	4	5	6
Frecuencia relativa	0,164	0,168	0,172	0,161	0,163	0,172

Las frecuencias relativas están muy próximas al valor teórico de la probabilidad de cada suceso (0,166) por lo que no se puede deducir que el dado esté trucado.

Evaluación C

1. Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios.

- a) Lanzamos una chincheta al aire y anotamos la posición en la que cae.
- b) Indicar la temperatura a la que podemos congelar un vaso de agua.
- c) El número de llamadas que recibe una telefonista en una hora.
- d) El número de entradas que se vendieron ayer en un teatro determinado.

a) Sí es aleatorio. b) No es aleatorio. c) Sí es aleatorio. d) No es aleatorio.

2. Lanzamos al aire cuatro monedas equilibradas. Sea A el suceso sacar al menos 3 caras.

- a) ¿Es un experimento aleatorio? Describe el espacio muestral.
- b) ¿Qué elementos forman el suceso A ? ¿Y el suceso \bar{A} ?
- c) ¿Qué elementos forman el suceso sacar solo una cara o solo una cruz?

a) Sí, es un experimento aleatorio.

$E = \{CCCC, CCCX, CCXC, CXCC, XCCC, CCXX, CXCX, CXXC, XCCX, XCXC, XXCC, CXXX, XCXX, XXCX, XXXC, XXXX\}$.

b) El suceso A lo forman los elementos $\{CCCC, CCCX, CCXC, CXCC, XCCC\}$, y el suceso \bar{A} , $\{CCXX, CXCX, CXXC, XCCX, XCXC, XXCC, CXXX, XCXX, XXCX, XXXC, XXXX\}$.

c) El suceso sacar solo una cara o solo una cruz lo forman los elementos $\{CCCX, CCXC, CXCC, XCCC, CXXX, XCXX, XXCX, XXXC\}$.

3. En el experimento aleatorio que consiste en extraer una carta de una baraja española, considera estos sucesos.

$A =$ salir una carta de oros $B =$ salir un número inferior a 5 $C =$ salir un caballo

Describe con palabras los sucesos \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$, $\bar{A} \cap C$, $\overline{B \cup C}$ y $\overline{B \cap C}$.

$\bar{A} =$ salir una carta de copas, espadas o bastos

$\bar{B} =$ salir un número superior a 5

$\bar{C} =$ no salir un caballo

$A \cup B =$ salir oros o un número inferior a 5

$A \cap B =$ salir as, 2, 3, 4 o 5 de oros

$A \cup C =$ salir oros o un caballo

$\bar{A} \cap C =$ salir un caballo de copas, espadas o bastos

$\overline{B \cup C} =$ salir un número superior a 5 que no sea un caballo

$\overline{B \cap C} =$ salir cualquier carta

4. Considera el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado de 9 caras.

- a) Describe el espacio muestral.
- b) Halla la probabilidad de que el resultado sea par.
- c) Halla la probabilidad de que el resultado sea un número primo.
- d) Halla la probabilidad de que el resultado sea un divisor de 12. ¿Alguno de estos sucesos son equiprobables?

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ b) $P(\text{par}) = \frac{4}{9}$ c) $P(\text{primo}) = \frac{5}{9}$

d) Los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6, 12. Entonces: $P(\text{divisor de 12}) = \frac{5}{9}$

Los sucesos salir un número primo y salir divisor de 12 son equiprobables ya que tienen la misma probabilidad.

5. Una urna contiene 7 bolas rojas, 4 blancas y 1 negra. Si extraemos una bola sin mirar, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja? ¿Y de que no sea blanca? ¿Y verde?

a) $P(\text{roja}) = \frac{7}{12}$ b) $P(\text{no blanca}) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ c) $P(\text{verde}) = 0$

6. Una moneda está trucada de modo que la probabilidad de obtener cara es el triple que la de obtener cruz. ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de los posibles resultados?

$$P(\text{cara}) = 3 \cdot P(\text{cruz})$$

$$P(\text{cara}) + P(\text{cruz}) = 1 \rightarrow 3 \cdot P(\text{cruz}) + P(\text{cruz}) = 1 \rightarrow 4 \cdot P(\text{cruz}) = 1 \rightarrow P(\text{cruz}) = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{cara}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

7. Sara guarda en un cajón 2 calcetines rojos, 2 verdes y 2 azules. Si coge un par de calcetines sin mirar, ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

Sea cual sea el calcetín que se coja primero, el segundo tiene que ser del mismo color.

Una vez cogido el primero, nos quedan 5 calcetines y solo 1 es del color que queremos.

$$\text{Entonces: } P(\text{ser del mismo color}) = \frac{1}{5}$$

Otra forma de resolver el problema sería describiendo todas las opciones posibles.

8. Si colocamos al azar las letras E, M, O y R, ¿cuál es la probabilidad de que salga la palabra MORE?

Describimos el espacio muestral.

$E = \{\text{EMOR, EMRO, EOMR, EORM, ERMO, EROM, MEOR, MERO, MOER, MORE, MREO, MROE, OEMR, OERM, OMER, OMRE, OREM, ORME, REMO, REOM, RMEO, RMOE, ROEM, ROME}\}$

$$P(\text{palabra MORE}) = \frac{1}{24}$$

9. Se extraen sucesivamente dos bolas de una urna que contiene 13 bolas rojas y 8 bolas azules. Halla la probabilidad de que ambas sean rojas si la primera bola:

a) Se devuelve.

b) No se devuelve.

$$\text{a) } P(\text{ambas rojas}) = P(\text{primera roja}) \cdot P(\text{segunda roja}) = \frac{13}{21} \cdot \frac{13}{21} = \frac{169}{441}$$

$$\text{b) } P(\text{ambas rojas}) = P(\text{primera roja}) \cdot P(\text{segunda roja}) = \frac{13}{21} \cdot \frac{12}{20} = \frac{156}{420} = \frac{13}{35}$$

10. Lanzamos una moneda 5 veces y salen 4 caras y una cruz. ¿Se puede afirmar que la moneda está trucada? ¿Y si se lanza 1 000 veces y salen 800 caras?

Lanzando el dado solamente 5 veces no se puede deducir nada ya que son muy pocos lanzamientos.

Al lanzar la moneda 1 000 veces, la frecuencia relativa tiene que estar muy próxima a la probabilidad del suceso.

Si el número de caras fuera próximo a 500 no podríamos deducir nada, pero saliendo 800 caras de 1 000 lanzamientos la probabilidad de salir cara está cerca de 0,8.

Luego se puede afirmar que la moneda está trucada.

Evaluación D

1. Lanzamos dos monedas equilibradas y un dado.

a) ¿Es un experimento aleatorio?

b) Describe el espacio muestral.

c) Escribe un suceso seguro y un suceso imposible.

a) Sí, es aleatorio ya que no conocemos el resultado que se va a producir.

b) $E = \{CC1, CC2, CC3, CC4, CC5, CC6, CX1, CX2, CX3, CX4, CX5, CX6, XC1, XC2, XC3, XC4, XC5, XC6, XX1, XX2, XX3, XX4, XX5, XX6\}$

c) Respuesta abierta. Suceso seguro: salir un número menor que 10. Suceso imposible: salir 3 caras.

2. Lanzamos dos dados y sumamos los resultados. Consideramos estos sucesos.

$A =$ la suma es par

$B =$ la suma es un múltiplo de 3

$C =$ la suma es un número primo

a) Describe el espacio muestral mediante una tabla de resultados.

b) Describe los sucesos $A, B, C, \bar{A}, \bar{B}$ y $\bar{B} \cup \bar{C}$

a)

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

b) $A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$

$B = \{(1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (6, 3), (6, 6)\}$

$C = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 6), (6, 1), (6, 5)\}$

$\bar{A} = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}$

$\bar{B} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 4), (4, 6), (5, 2), (5, 3), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 4), (6, 5)\}$

$\bar{B} \cup \bar{C} = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (6, 3), (6, 6)\}$

3. Considera el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado de 20 caras y anotar el resultado. Sean los sucesos $A =$ salir par y $B =$ salir un número primo o un múltiplo de 5. ¿Son equiprobables?

$$P(\text{par}) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$P(\text{primo o múltiplo de 5}) = \frac{11}{20}$ ya que los casos favorables son 2, 3, 5, 7, 10, 11, 13, 15, 17, 19 y 20.

Luego los sucesos no son equiprobables.

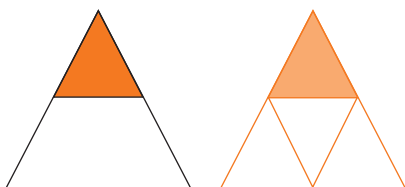
4. El jugador de baloncesto A anota 9 de cada 11 tiros, y el B , 17 de cada 21. Si lanzan un tiro cada uno, ¿quién de los dos es más probable que enceste?

$$P(\text{enceste } A) = \frac{9}{11} = 0,8181$$

$$P(\text{enceste } B) = \frac{17}{21} = 0,8095$$

Es más probable que enceste el jugador A .

5. ¿Cuál es la probabilidad de tiremos un dado en esta figura y caiga en la zona coloreada?



Se puede dividir el triángulo en 4 partes iguales. Luego la probabilidad pedida es $\frac{1}{4}$.

6. Considera el experimento aleatorio que consiste en lanzar dos dados y multiplicar sus resultados. Halla el espacio muestral. ¿Cuáles son los resultados más probables?

•	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Representamos el espacio muestral ayudándonos de una tabla.

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$$

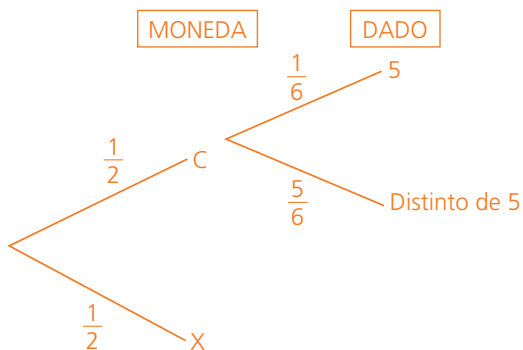
En la tabla se observa que los resultados más probables son 6 y 12 con una probabilidad de $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ cada uno.

7. Lanzamos una moneda n veces. Sabiendo que el espacio muestral del experimento tiene 1024 elementos, ¿cuántas veces se ha lanzado la moneda?

Como el experimento simple *lanzar una moneda* tiene dos resultados posibles, lanzarla n veces tiene 2^n resultados posibles. Luego: $2^n = 1024 \rightarrow n = 10$

La moneda se ha lanzado 10 veces.

8. Lanzamos una moneda. Si sale cara tiramos un dado y ganamos si el resultado es 5. Si sale cruz, perdemos. ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Y de sacar cara en la moneda y perder?



Representamos los distintos casos mediante un diagrama de árbol.

$$P(\text{ganar}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$P(\text{sacar cara y perder}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$$

9. Sean dos sucesos incompatibles A y B , de manera que $P(A) = 0,5$ y $P(\bar{B}) = 0,7$. Calcula $P(A \cup B)$ y $P(\bar{A} \cap B)$.

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0,7 = 0,3$$

Como A y B son incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,5 + 0,3 = 0,8$.

$P(\bar{A} \cup B) = P(B) = 0,3$ ya que al ser A y B incompatibles, B está incluido en \bar{A} .

10. Jaime ha lanzado un dado 10 veces y se ha obtenido 6 veces un 6. Después de lanzarlo 10000 veces, ha obtenido 1600 veces un 6. ¿Crees que el dado está trucado? Compara la probabilidad teórica con la probabilidad experimental para razonar tu respuesta.

La probabilidad teórica si el dado no está trucado es $\frac{1}{6} = 0,1666\dots$

La probabilidad experimental es: $\frac{1600}{10000} = 0,16$

El dado no está trucado ya que la probabilidad teórica y experimental son muy próximas.

PRUEBA FINAL DE CURSO

Evaluación A

1. Calcula y simplifica el resultado: $\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) : \frac{2}{3}$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) : \frac{2}{3} = \frac{1}{25} - \left(\frac{2}{4} - \frac{3}{4}\right) : \frac{2}{3} = \frac{1}{25} - \left(-\frac{1}{4}\right) : \frac{2}{3} = \frac{1}{25} - \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{25} + \frac{3}{8} = \frac{8}{200} + \frac{75}{200} = \frac{83}{200}$$

2. Halla el valor de estas expresiones.

a) $\sqrt[3]{36} : (\sqrt{2})^2 \cdot 12^{1/4}$

b) $3\sqrt{450} - 7\sqrt{50} + \sqrt{98} - 6\sqrt{32}$

a) $\sqrt[3]{36} : (\sqrt{2})^2 \cdot 12^{1/4} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2} : \sqrt{2^2} \cdot \sqrt[4]{2^2 \cdot 3} = \sqrt[12]{2^8 \cdot 3^8} : \sqrt[12]{2^{12} \cdot 3^3} = \sqrt[12]{2^8 \cdot 3^8} : \sqrt[12]{2^{12} \cdot 3^3} = \sqrt[12]{2^2 \cdot 3^5}$

b) $3\sqrt{450} - 7\sqrt{50} + \sqrt{98} - 6\sqrt{32} = 3\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} - 7\sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2 \cdot 7^2} - 6\sqrt{2^5} = 3 \cdot 3 \cdot 5\sqrt{2} - 7 \cdot 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 6 \cdot 2^2\sqrt{2} = 45\sqrt{2} - 35\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 24\sqrt{2} = -7\sqrt{2}$

3. Desarrolla las siguientes identidades notables.

a) $(-2x - 4y)^2$

b) $(-2y^2 + 5)^2$

c) $(-3z + 2y^2)(-3z - 2y^2)$

d) $\left(x^2y + \frac{1}{2}x\right)^2$

a) $(-2x - 4y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 4y + (4y)^2 = 4x^2 + 16xy + 16y^2$

b) $(-2y^2 + 5)^2 = (2y^2)^2 - 2 \cdot 2y^2 \cdot 5 + 5^2 = 4y^4 - 20y^2 + 25$

c) $(-3z + 2y^2)(-3z - 2y^2) = (-3z)^2 - (2y^2)^2 = 9z^2 - 4y^4$

d) $\left(x^2y + \frac{1}{2}x\right)^2 = (x^2y)^2 + 2 \cdot x^2y \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = x^4y^2 + x^3y + \frac{1}{4}x^2$

4. Resuelve la siguiente ecuación: $2x^4 - 2x^2 - 24 = 0$

Es una ecuación bicuadrada. Haciendo el cambio de variable $x^2 = p$ y resolvemos la ecuación $2p^2 - 2p - 24 = 0$.

$$p = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-24)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 192}}{4} = \frac{2 \pm 14}{4} \rightarrow \begin{cases} p_1 = 4 \\ p_2 = -3 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variable con cada solución: $\begin{cases} x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \\ x^2 = -3 \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases}$

Las soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$.

5. Simplifica y resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{-x+2}{3} + \frac{y-1}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{2x+1}{4} - \frac{3y}{5} = -\frac{11}{20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-x+2}{3} + \frac{y-1}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{2x+1}{4} - \frac{3y}{5} = -\frac{11}{20} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{-4x+8}{12} + \frac{3y-3}{12} = \frac{6}{12} \\ \frac{10x+5}{20} - \frac{12y}{20} = -\frac{11}{20} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x+8+3y-3=6 \\ 10x+5-12y=-11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x+3y=1 \\ 10x-12y=-16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x+3y=1 \\ 5x-6y=-8 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 2, sumamos las ecuaciones y resolvemos para hallar x .

$$\begin{cases} -8x+6y=2 \\ 5x-6y=-8 \end{cases} \rightarrow -3x=-6 \rightarrow x = \frac{-6}{-3} = 2$$

Sustituimos el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones y hallamos y .

$$-4 \cdot 2 + 3y = 1 \rightarrow 3y = 9 \rightarrow y = 3$$

6. Halla el primer término, el término general y la suma de los 50 primeros términos de una progresión aritmética cuya diferencia es 5 y su décimo término es 29.

Hallamos el primer término sustituyendo los datos en la expresión del término general.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \rightarrow a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot 5 \rightarrow 29 = a_1 + 45 \rightarrow a_1 = -16$$

Por tanto, el término general es: $a_n = a_1 + (n - 1)d \rightarrow a_n = -16 + (n - 1) \cdot 5 \rightarrow a_n = 5n - 21$

Para calcular la suma de los 50 primeros términos necesitamos hallar a_{50} .

$$a_{50} = 5 \cdot 50 - 21 = 229$$

Sustituyendo en la fórmula: $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \rightarrow S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(-16 + 229) \cdot 50}{2} = 5325$

7. Halla el área y el volumen de un cono de 12 cm de diámetro y 18 cm de generatriz.

Calculamos la longitud de la altura aplicando el teorema de Pitágoras con el radio y la generatriz.

$$h^2 = g^2 - r^2 = 18^2 - 6^2 = 324 - 36 = 288 \rightarrow h = \sqrt{288} = 16,97 \text{ cm}$$

Hallamos el área y el volumen sustituyendo los datos en las fórmulas.

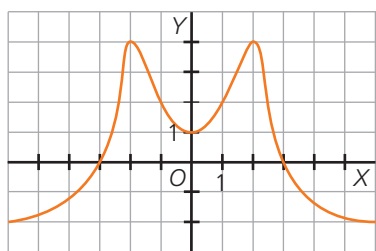
$$A_b = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 6^2 = 113,1 \text{ cm}^2$$

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 6 \cdot 18 = 339,29 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_b = 339,29 + 113,1 = 452,39 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{113,1 \cdot 16,97}{3} = \frac{1919,307}{3} = 639,769 \text{ cm}^3$$

8. Describe las características de esta gráfica.



Dominio: $[-6, 6]$; Recorrido: $[-2, 4]$

Puntos de corte: $(-3, 0)$, $(0, 1)$, $(3, 0)$

Creciente en $(-6, -2)$ y $(0, 2)$.

Decreciente en $(-2, 0)$ y $(2, 6)$.

Máximos: $(-2, 4)$ y $(2, 4)$; Mínimo: $(0, 1)$

La función es continua, simétrica par y no es periódica.

9. Representa la función cuadrática $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

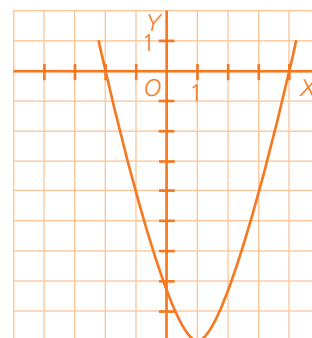
Como $a = 1 > 0$, la parábola tiene las ramas abiertas hacia arriba.

Vértice:
$$\left. \begin{aligned} -\frac{b}{2a} &= -\frac{-2}{2} = 1 \\ f(1) &= 1 - 2 - 8 = -9 \end{aligned} \right\} \rightarrow V(1, -9)$$
 Eje de simetría: $x = 1$

Puntos de corte con el eje X: $x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases} \rightarrow (4, 0) \text{ y } (-2, 0)$$

Puntos de corte con el eje Y: $f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 8 = -8 \rightarrow (0, -8)$



10. Dada la siguiente tabla, halla la media, la mediana, la varianza y la desviación típica.

x_i	f_i	F_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i \cdot f_i^2$
3	2	2	6	18
4	5	7	20	80
5	10	17	50	250
6	12	29	72	432
7	8	37	56	392
8	3	40	24	192
Suma	40		228	1364

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{N} = \frac{228}{40} = 5,7$$

La mediana es la media de los datos que se encuentran en las posiciones 20 y 21. Como en estas dos posiciones el dato es el mismo (6) se concluye que la mediana es 6.

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i \cdot f_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{1364}{40} - 5,7^2 = 34,1 - 32,49 = 1,61$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1,61} = 1,27$$

Evaluación B

1. Un grupo de amigos ha realizado una ruta en tres etapas. El primer día hicieron la tercera parte del recorrido, y el segundo, las tres octavas partes de lo que quedaba. Si aún les quedan 175 km por recorrer, ¿cuál es la longitud total del trayecto?

Si el primer día recorrieron la tercera parte, el segundo día recorren: $\frac{3}{8}$ de $\frac{2}{3} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

Sumando el recorrido del primer y segundo día tenemos: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$

Quedan $\frac{5}{12}$ por recorrer que equivalen a 175 km. Por tanto, el trayecto total es: $\frac{175 \cdot 12}{5} = 420$ km

2. Expresa en forma de una única potencia.

a) $(-2)^{-7} \cdot (-2)^4 : [(-2)^3]^3$ b) $5^4 : 5^{-3} \cdot 5^0 \cdot 5$ c) $(7^{-3})^5 : \frac{1}{7^{-1}}$ d) $\frac{3}{((3^2)^{-6})^{-3}}$

a) $(-2)^{-7} \cdot (-2)^4 : [(-2)^3]^3 = (-2)^{-7+4-9} = (-2)^{-12}$ c) $(7^{-3})^5 : \frac{1}{7^{-1}} = 7^{-15} : 7 = 7^{-15-1} = 7^{-16}$

b) $5^4 : 5^{-3} \cdot 5^0 \cdot 5 = 5^{4-(-3)+0+1} = 5^8$ d) $\frac{3}{((3^2)^{-6})^{-3}} = \frac{3}{3^{36}} = 3^{1-36} = 3^{-35}$

3. Encuentra las raíces y factoriza el polinomio $x^3 - 9x^2 + 24x - 20$.

Los candidatos a raíz del polinomio son los divisores de -20 , es decir, $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10$ y ± 20 . Probamos mediante el método de Ruffini cuál de ellos es raíz del polinomio.

2	1	-9	24	-20	El número 2 es raíz por lo que $x - 2$ es un factor.
		2	-14	20	Para encontrar las otras dos raíces, resolvemos la ecuación de segundo grado que nos ha quedado como cociente.
	1	-7	10	0	$x^2 - 7x + 10 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases} \rightarrow x - 2 \text{ y } x - 5 \text{ son factores.}$

Luego: $x^3 - 9x^2 + 24x - 20 = (x - 2)^2(x - 5)$

4. Resuelve esta ecuación: $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$

Hacemos el cambio de variable $x^2 = p$ y resolvemos la ecuación de segundo grado $p^2 - 11p + 18 = 0$.

$$p = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18}}{2 \cdot 1} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 72}}{2} = \frac{11 \pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} p_1 = 9 \\ p_2 = 2 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variable: $\begin{cases} x^2 = 9 \rightarrow x = \pm \sqrt{9} = \pm 3 \\ x^2 = 2 \rightarrow x = \pm \sqrt{2} \end{cases} \rightarrow x_1 = 3, x_2 = -3, x_3 = \sqrt{2}, x_4 = -\sqrt{2}$

5. Simplifica y resuelve este sistema:
$$\begin{cases} \frac{x-4}{3} + \frac{2y+1}{5} = 6 \\ \frac{2x-1}{5} + \frac{3y-1}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{cases} \frac{x-4}{3} + \frac{2y+1}{5} = 6 \\ \frac{2x-1}{5} - \frac{3y-1}{4} = 0 \end{cases} \right\} \rightarrow \left. \begin{cases} \frac{5x-20}{15} + \frac{6y+3}{15} = \frac{90}{15} \\ \frac{8x-4}{20} - \frac{15y-5}{20} = 0 \end{cases} \right\} \rightarrow \begin{cases} 5x-20+6y+3=90 \\ 8x-4-15y+5=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x+6y=107 \\ 8x-15y=-1 \end{cases}$$

Resolviendo por cualquier método nos queda como solución $x = 13, y = 7$.

6. Halla la suma de los cinco primeros términos de una progresión geométrica cuya razón es $\frac{2}{3}$ y su cuarto término $\frac{3}{8}$.

Calculamos el primer término de la progresión y, después, la suma de los cinco primeros términos.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_4 = a_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4-1} \rightarrow \frac{3}{8} = a_1 \cdot \frac{8}{27} \rightarrow a_1 = \frac{3}{8} \cdot \frac{27}{8} = \frac{81}{64}$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \rightarrow S_5 = \frac{a_1 \cdot (r^5 - 1)}{r - 1} = \frac{\frac{81}{64} \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^5 - 1\right]}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{211}{64}$$

7. Halla el área total y el volumen de un prisma hexagonal regular sabiendo que la longitud del lado de la base es 10 cm, y su altura, 5 cm.

Calculamos la apotema de la base aplicando el teorema de Pitágoras.

$$a^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75 \rightarrow a = \sqrt{75} = 8,66 \text{ cm}$$

$$A_b = A_{\text{Hexágono}} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 10 \cdot 8,66}{2} = 259,8 \text{ cm}^2 \quad A_L = P \cdot h = 6 \cdot 10 \cdot 5 = 300 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2A_b = 300 + 2 \cdot 259,8 = 819,6 \text{ cm}^2 \quad V = A_b \cdot h = 259,8 \cdot 5 = 1299 \text{ cm}^3$$

8. Dada la recta $\frac{x-4}{5-4} = \frac{y+1}{6+1}$ halla las ecuaciones punto pendiente, explícita y general de la recta.

$$\text{Ecuación punto pendiente: } \frac{x-4}{5-4} = \frac{y+1}{6+1} \rightarrow x-4 = \frac{y+1}{7} \rightarrow y+1 = 7(x-4)$$

$$\text{Ecuación explícita: } y+1 = 7(x-4) \rightarrow y+1 = 7x-28 \rightarrow y = 7x-29$$

$$\text{Ecuación general: } y = 7x-29 \rightarrow -7x+y+29 = 0$$

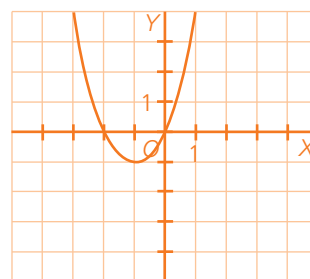
9. Representa esta función cuadrática: $f(x) = x^2 + 2x$

Como $a = 1 > 0$, la parábola tiene las ramas abiertas hacia arriba.

$$\text{Vértice: } \left. \begin{array}{l} -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1 \\ f(-1) = 1 - 2 = -1 \end{array} \right\} \rightarrow V(-1, -1) \quad \text{Eje de simetría: } x = -1$$

$$\text{Puntos de corte con el eje X: } x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \end{cases} \rightarrow (0, 0), (-2, 0)$$

$$\text{Puntos de corte con el eje Y: } f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 = 0 \rightarrow (0, 0)$$



10. Miriam, Ruth y Susana lanzan dos dados y suman sus resultados. Si la suma es 7 gana Miriam, si la suma es 2, 3 o 12 gana Ruth, y si la suma es 4 o 11, gana Susana. ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar?

Al lanzar dos dados el número de posibles resultados es $6 \cdot 6 = 36$.

Miriam gana si sale (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2) o (6, 1). Entonces, $P(\text{gana Miriam}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Ruth gana si sale (1, 1), (1, 2), (2, 1) o (6, 6). Luego, $P(\text{gana Ruth}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Susana gana si sale (1, 3), (2, 2), (3, 1), (5, 6) o (6, 5). Entonces, $P(\text{gana Susana}) = \frac{5}{36}$.

Miriam es quien tiene más probabilidad de ganar.